

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

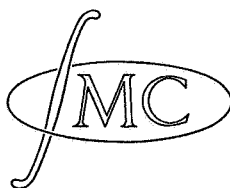
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Cursus "Lie-groepen in meetkundige behandeling"

(gegeven te Eindhoven)

door

Prof.dr. H. Freudenthal



1959/1960

~~NUMEROIR~~ MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Cursus "Lie-groepen in meetkundige behandeling"

te Eindhoven

door

Prof.Dr H. Freudenthal

1e voordracht: maandag 5 oktober 1959

1. De reële getallen vormen een (commutatieve) groep G t.o.v. de optelling

$$a + b ;$$

$$0$$

speelt de rol van de groep-één, en

$$-a$$

die van inverse van a . Maar tevens bestaat er in het gebied van de reële getallen een limiet-begrip, en de groepoperaties

$$a + b \quad \text{en} \quad -a$$

zijn continue operaties t.a.v. dit limiet-begrip, d.w.z.

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n ,$$

$$\lim (-a_n) = - \lim a_n .$$

Zulke combinaties van algebraïsche en topologische begrippen (groep en limiet) bestudeert men onder de naam "continue groepen".

De vermenigvuldigingsgroep G' van de positieve getallen is een ander voorbeeld. Tussen G en G' bestaat een isomorphie, die bijv. door de functie

$$f(x) = e^x$$

wordt tot stand gebracht. Inderdaad doet $f(x)$ aan de som van twee getallen het product beantwoorden, is dus een homomorfe afbeelding van G in G' , en met ziet gemakkelijk in, dat deze relatie eenduidig en omkeerbaar is. Tevens is f in beide richtingen continu (ja, zelfs willekeurig vaak differentieerbaar) - iets waarop men bij continue groepen veelal prijs stelt.

Laat men x nu alle complexe getallen doorlopen, dan doorloopt e^x alle complexe getallen $\neq 0$, terwijl ook weer aan de som het product

beantwoordt. Die functie levert dus ook een homomorfisme van de optelgroep der complexe getallen met de vermenigvuldigingsgroep der complexe getallen $\neq 0$. Dit homomorfisme is ook weer eenduidig en continu, maar het is geen isomorfisme; de origineelverzameling van de 1 bestaat immers uit alle getallen $2\pi i n$ (n geheel), dus in elk geval uit meer dan de 0.

e^x beeldt speciaal de optelgroep H der imaginaire getallen op een ondergroep H' van de vermenigvuldigingsgroep der complexe getallen af, nl. op de ondergroep der complexe getallen w met $|w|=1$, de "eenheidscirkel"; ook dit homomorfisme is niet omkeerbaar eenduidig: de imaginaire as wordt als het ware oneindig vaak over de eenheidscirkel gewikkeld. I.p.v. e^x kan men ook e^{ix} beschouwen, waardoor dan de optelgroep der reële getallen wordt afgebeeld op de vermenigvuldigingsgroep der getallen $|w|=1$.

Nog algemener kan men de afbeelding

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

beschouwen (met willekeurige vaste α) - eveneens een homomorfisme van het additieve naar het multiplicatieve.

2. Men kan in de exponent van e ook een kwadratische matrix (lin.afbeelding) schrijven

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

is zinvol, omdat de optredende matrix-producten en -partiaalsommen zinvol zijn en de reeks, zoals men gemakkelijk ziet, convergeert voor elke keuze der matrix A ; e^A is natuurlijk weer een matrix.

$$e^0 = 1$$

(0 = nulmatrix, 1 = één matrix).

Nu geldt echter

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

niet meer onvoorwaardelijk. Wel is deze formule juist, wanneer $AB = BA$ is. Want

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA} e^{tA+B}) = 0 \quad *)$$

dus $e^{-tA} e^{tA+B} = \text{constant matrix } C$,
 die (na substitutie $t = 0$) $= e^B$ blijkt te zijn, waaruit voor $t = 1$
 volgt: $e^{-A} e^{A+B} = e^B$,
 dus (voor $B = 0$) $e^{-A} e^A = 1$
 en algemeen $e^{A+B} = e^A e^B$.

Speciaal geldt dus ook

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} e^{tA},$$

omdat sA en tA verwisselbaar zijn.

Hieruit volgt dat $f(t) = e^{tA}$

een homomorfe continue afbeelding van de optelgroep der reële getallen t op de vermenigvuldigingsgroep der matrices e^{tA} is.

Speciaal (voor $s = -t$)

$$e^A e^{-A} = 1,$$

of

$$e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

Wij hebben hier dus minder triviale voorbeelden van homomorfe voorstelling der optelgroep. Tussen de eigenwaarden Λ van A en λ van e^A bestaat het eenvoudig verband $\lambda = e^\Lambda$.

Vat men de n -bij- n matrix A als afbeelding in zichzelf van een n -dimensionale ruimte op, dan is e^{tA} een van de "tijd" t afhankelijke afbeelding van dezelfde ruimte, dus een schaar transformaties (die tevens een groep vormen), die voor $t = 0$ de hele ruimte met rust laat. Het "snelheidsveld" van deze schaar voor $t = 0$ wordt door differentieren naar t verkregen,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA};$$

A is dus zelf niets anders dan het snelheidsveld voor $t = 0$.

We kunnen zelfs in een ∞ -dimensionale ruimte overstappen, bijv. in die, waarvan de punten zijn, de functies φ van een reële veranderlijke x , $-\infty < x < +\infty$. De substitutie $x \rightarrow x+t$ induceert een afbeelding $\sum_t$ in deze ruimte

$$\sum_t (\varphi(x)) = \varphi(x+t),$$

en deze $\sum_t$ -en geven weer een homomorf beeld van de optelgroep der t -en

$$\sum_s \left\{ \sum_t \{ \varphi(x) \} \right\} = \sum_s \{ \varphi(x+t) \} = \varphi(x+s+t) = \sum_{s+t} \varphi(x),$$

dus

$$\sum_s \sum_t = \sum_{s+t}.$$

Ook hier kunnen we van een snelheidsvector (bv. voor $t = 0$) spreken,

$$\frac{d}{dt} \sum_t (\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \varphi(x)$$

(dit is dan echter niet voor alle φ -en gedefinieerd).

In beperkte mate lukt het zelfs weer

$$e^{tA} \text{ met } A = \left(\frac{d}{dt} \sum_t \right)_{t=0} = \frac{d}{dx}$$

te vormen, dit zou zijn

$$= \sum \frac{t^n}{n!} A^n = \sum \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n$$

en toegepast op een functie $\varphi(x)$:

$$\sum \frac{t^n}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = \varphi(x+t)$$

(bij regulier analytische φ : reeks van Taylor). We hebben dus weer

$$\sum_t = e^t \frac{d}{dx}$$

(wat echter niet voor alle φ zinvol en juist is).

Men kan deze voorstelling van de optelgroep in een ∞ -dimensionale ruimte nog in een ander verband zien: Voor een uitgebreide functieklassie is de relatie

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \varphi(x) dx$$

tussen φ en φ^* eeneenduidig:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \varphi^*(y) dy.$$

We schrijven ook kort

$$Z(\varphi) = \varphi^*.$$

Op welke wijze vertaalt Z nu de groep $\sum_t$ van de φ -taal in de φ^* -taal?

$$\begin{aligned} \sum_t \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+t)y} \varphi^*(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \varphi^*(y) e^{ity} dy \\ &= Z^{-1}(\varphi^*(y) e^{ity}), \end{aligned}$$

dus als de φ -en de transformatie $\sum_t$ ondergaan, ondergaan de φ^* -en de transformatie

$$P_t(\varphi^*(y)) = \varphi^*(y)e^{ity},$$

dus de vermenigvuldiging met e^{ity} ; en de P_t geven een nieuwe voorstelling van de optelgroep, waarvan het snelheidsveld voor $t = 0$ is de vermenigvuldiging met iy , dus

$$\left(\frac{dP_t}{dt}\right)_{t=0} = iy$$

en
$$P_t = e^{ity}.$$

3. De tot nu toe behandelde groepen (voorstellingen van de optelgroep) noemt men éénledig. We behandelen nu algemenere.

We denken ons een groep G van n -bij- n matrices, die binnen de verzameling van alle n -bij- n matrices een r -dim variëteit vormen, dwz. in de omgeving van elk element $a_0 \in G$ kunnen we reële of complexe parameters $\tau_1, \dots, \tau_r$ invoeren, waarvan de groepelementen eenduidig afhangen; deze afhankelijkheid wordt bovendien twee keer continu differentieerbaar met functionaalmatrix van de rang r verondersteld; in elk punt a_0 bezit G dus een r -dim lin raakvariëteit, en deze raakvariëteit hangt weer continu differentieerbaar van a_0 af.

Zulk een groep noemen we een (reële of complexe) Lie-groep en wel omdat de elementen lin.afbeeldingen zijn, een lineaire Lie-groep.

Voorbeelden: G_1 : alle n -bij- n matrices a met $\det a \neq 0$, als parameters kan men de matrixcoëfficiënten zelf kiezen.

G_2 : als G_1 , maar met $\det a = 1$; een der genoemde parameters is overbodig.

G_3 : de orthogonale n -bij- n matrices; dus $aa' = 1$ ($a' =$ gespiegelde van a). Zoek zelf geschikte parameters!

G_4 : de unitaire n -bij- n matrices; dus $a \bar{a}^T = 1$.

G_5 : de matrices $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

G_6 : de matrices $\begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{i\beta t} \end{pmatrix}$
 α, β, t reëel.

Opmerking: Zijn α, β relatief onmeetbaar, dan komen voor geschikte willekeurig grote t deze matrices weer in de buurt van $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ terecht (dus ook van elk ander element); nemen we echter in een om-

geving van zulk een matrix alleen die op met weinig afwijkende t , dan valt ook dit voorbeeld onder het gedefinieerde type. De exacte formulering brengen we later.

4. Uit zulk een r -dim groep G pakken we nu een schaar a_t , die twee keer continu differentieerbaar afhangt van een parameter t (niet noodzakelijk een ondergroep); we veronderstellen verder $a_0 = 1$. Van deze schaar vormen we weer het snelheidsveld voor $t = 0$, dus

$$A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_{t=0} ;$$

zo iets heet een infinitesimaal element van G . De verzameling Γ van alle mogelijke inf. elementen van G heet de inf. groep van G . Γ zal blijken volgende bijzondere eigenschappen te bezitten:

1. Γ is een r -dim lin ruimte (de raakruimte van G in 1), dus

$$1.1 \quad A \in \Gamma \rightarrow \alpha A \in \Gamma \quad (\alpha \text{ getal})$$

$$1.2 \quad A, B \in \Gamma \rightarrow A+B \in \Gamma$$

$$1.3 \quad \text{Er zijn } A_1, \dots, A_r \in \Gamma \text{ met}$$

$$1.3.1. \quad A = \sum \alpha_\nu A_\nu \text{ voor elke } A \in \Gamma$$

$$1.3.2. \quad \sum \alpha_\nu A_\nu = 0 \rightarrow \text{alle } \alpha_\nu = 0.$$

$$2. \quad A \in \Gamma, B \in \Gamma \rightarrow [A, B] = AB - BA \in \Gamma.$$

$[A, B]$ heet infinitesimale commutator van A en B . Op twee bijzondere eigenschappen van de commutator wijzen we meteen:

$$[A, B] + [B, A] = 0$$

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

(de tweede heet ook de Jacobirelatie).

Elke verzameling Γ , die aan 1-2 voldoet heet een (reële of compl.) Lie-ring. We weten dus: elke inf groep is een Lie-ring.

5. We bewijzen het gestelde

$$1.1. \text{ Is } A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0, \text{ dan is } \alpha A = \left(\frac{da_{\alpha t}}{dt} \right)_0$$

$$1.2. \text{ Is } A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0, B = \left(\frac{db_t}{dt} \right)_0, \text{ dan is ook } c(t) = a(t)b(t)$$

eën toegelaten schaar en

$$\frac{dc_t}{dt} = \frac{da_t}{dt} b + a_t \frac{db_t}{dt}, \text{ dus}$$

$$\left(\frac{dc_t}{dt} \right)_0 = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0 + \left(\frac{db_t}{dt} \right)_0 = A + B.$$

1.3. We stellen in $a(\tau_1, \dots, \tau_r)$ de $\tau_\nu = t$ en de overige $= 0$, ($a(0, \dots, 0) = 1$).

$$A_\nu = \left(\frac{da}{dt} \right)_0 = \left(\frac{\partial a}{\partial \tau_\nu} \right)_0.$$

1.3.1. Voor een willekeurige kromme $c(t) = a(\tau_1, \dots, \tau_r)$ $\tau_\nu = \varphi_\nu(t)$ met $\varphi_\nu(0) = 0$ (alle ν) geldt dan

$$A = \left(\frac{dc}{dt} \right)_0 = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial \tau_\nu} \right)_0 \left(\frac{d\varphi_\nu}{dt} \right)_0 = \sum \alpha_\nu A_\nu.$$

1.3.2. De afbeelding van de τ -ruimte in de n^2 -dim ruimte der n -bij- n matrices bezit een functionaalmatrix met de rang r ; de r raakvectoren A_ν zijn dus onafhankelijk.

2. $A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0$ $B = \left(\frac{db_t}{dt} \right)_0$. We vormen de commutatorschaar $c_t = a_t b_t a_t^{-1} b_t^{-1} \in G$. Uit $a_t a_t^{-1} = 1$ volgt door differentieren

$$\frac{da_t}{dt} a_t^{-1} + a_t \frac{da_t^{-1}}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\text{dus} \quad \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0 = - \left(\frac{da_t^{-1}}{dt} \right)_0, \quad (2)$$

en door (1) nog eens te differentiëren

$$\left(\frac{d^2 a_t}{dt^2} \right)_0 + \left(\frac{d^2 a_t^{-1}}{dt^2} \right)_0 = 2 \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0^2 = 2A^2, \quad (3)$$

en hieruit

$$\left(\frac{dt}{dt} \right)_0 = 0$$

en volgens (2) en (3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 c}{dt^2} \right)_0 &= \left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_0 + \left(\frac{d^2 b}{dt^2} \right)_0 + \left(\frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} \right)_0 + \left(\frac{d^2 b^{-1}}{dt^2} \right)_0 \\ &+ 2AB - 2A^2 - 2AB - 2BA - 2B^2 + 2AB \\ &= 2(AB - BA). \end{aligned}$$

Definieert men een nieuwe schaar

$$k_s = c_t \text{ door } s = t^2,$$

dan wordt

$$\left(\frac{dk_s}{ds}\right)_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \frac{dc_t}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 c_t}{dt^2}\right)_0 = AB - BA,$$

dus

$$[A, B] \in \Gamma.$$

6. Voorbeelden.

G_1 : Γ bestaat uit alle n -bij- n matrices A , want $\det e^{tA} \neq 0$ voor kleine t , dus $e^{tA} \in G_1$ en $\left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right)_0 = (Ae^{tA})_0 = A$.

G_2 : Uit $\det a_t = 1$, volgt $\frac{d}{dt} \det a_t = 0$, dus
 $\left(\frac{d}{dt} \sum \pm \alpha_{1,\nu_1}(t) \dots \alpha_{n,\nu_n}(t)\right)_0 = \left(\sum \pm \alpha_{1,\nu_1} \dots \frac{d\alpha_{i,\nu_i}}{dt} \dots \alpha_{n,\nu_n}\right)_0 = \sum \left(\frac{d\alpha_{\mu\nu}}{dt}\right)_0 = 0$
 (want $\alpha_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, of 1 naar gelang $\mu \neq \nu$, of $\mu = \nu$).

Dus spoor $A = \chi(A) = 0$ voor alle $A \in \Gamma$. En omgekeerd: Is $\chi(A) = 0$ en zijn de Λ_ν eigenwaarden van A , dus $\sum \Lambda_\nu = 0$, dan zijn e^{Λ_ν} die van e^A , dus $\det e^A = 1$. Dus Γ de verzameling van alle A met $\chi(A) = 0$.

G_3 : Uit $a_t a_t' = 1$ volgt $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 + \left(\frac{da'}{dt}\right)_0 = 0$, dus $A + A' = 0$, dus alle $A \in \Gamma$ scheefsymmetrisch. En omgekeerd: Is A scheefsymmetrisch dus $A + A' = 0$, dan is

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \left(\sum \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu\right)' = \sum \frac{t^\nu}{\nu!} (-A)^\nu = e^{-tA} = \\ &= (e^{tA})^{-1}, \end{aligned}$$

dus e^{tA} orthogonaal. Dus Γ = verzameling der scheefsymmetrische A .

Voor het geval $n=3$ zijn U deze transformaties al als "infinitesimale draaiingen" bekend:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix};$$

Ax kan dus worden geschreven als uitproduct $[u, x]$, waar u de draai-asvector is. (Deze [...] niet met commutatorhaken te verwarren!).

G_4 : Analooog blijkt: Γ bestaat uit de matrices met $A + \overline{A}^T = 0$ oftewel $iA = \overline{(iA)}^T$ - dus Hermitische matrices maal i .

G_5 : Γ bestaat uit de $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & g \end{pmatrix}$.

In alle gevallen kan men de Lie-ring-eigenschappen gemakkelijk verifiëren. Speciaal is bij G_3 voor $n = 3$ met A als boven en

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = [u, x]$, $By = [v, y]$, dus

$$[A, B]z = ABz - BAz = [u[vz]] - [v[uz]] = [[u, v]z]$$

dus bezit $[A, B]$ als draaiasvector $[u, v]$. (Achteraf blijken beide soorten [...] equivalent te zijn.)

Ga nog na, wat de relaties tussen de eigenwaarden van A en e^A bij de afzonderlijke voorbeelden betekenen!

Een Lie-ring in een ∞ -dim ruimte komt in de quantenmechanica voor:

$$A : f(x) \rightarrow f(x)$$

$$B : f(x) \rightarrow \frac{d}{dx} f(x)$$

$$C : f(x) \rightarrow x f(x)$$

$$[A, B] = [A, C] = 0, [B, C] = A.$$

De bijbehorende groep bestaat uit de afbeeldingen

$$f(x) \rightarrow ae^{bx}f(x+c).$$

7. De betekenis van Γ voor G blijkt alvast uit het volgende:

We differentiëren $a_t \in G$ voor $t=t_0$. Nu is $b_t = a_t^{-1} a_t$ weer een kromme in G , maar tevens $b_{t_0} = 1$, dus $(\frac{db_t}{dt})_{t_0} \in \Gamma$, dus $(\frac{da_t}{dt})_{t_0} \in a_{t_0} \Gamma$.

En omgekeerd: Is $A \in \Gamma$, dus $A = \text{zekere } (\frac{db_t}{dt})_{t_0}$, dan is voor iedere

$a : (\frac{d(ab_t)}{dt})_{t_0} = aA \in a\Gamma$. Dus is de raakruimte van G in elk punt $a \in G$ vastgelegd, nl.

$$= a\Gamma.$$

Uitgaande van G kunnen we Γ en hierbij e^Γ vormen. Is dit weer $= G$? Heel gemakkelijk kan men meteen zien, dat $e^\Gamma \subset G$ is.

Zij $A = (\frac{da_t}{dt})_{t_0} \in \Gamma$, dus $a_t = 1 + tA + t\varepsilon(t)$, waar $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ voor $t \rightarrow 0$. Nu is eveneens in G bevat

$$(a_{1/n})^n = (1 + A/n + (1/n)\varepsilon(1/n))^n,$$

en dit nadert voor $n \rightarrow \infty$ tot e^A , wat dus ook in G bevat moet zijn.

(Dit bewijs heeft het nadeel, dat het niet zo gemakkelijk uitgebreid kan worden in een richting, die we later nodig zullen hebben.) We kunnen ook als volgt redeneren:

De schaar $b_t = e^{tA}$ is volkomen gekenmerkt door de differentiaalvergelijking

$$\frac{db_t}{dt} = b_t A$$

met de beginvoorwaarde

$$b_0 = 1,$$

die uniek oplosbaar is. Wat we moeten aantonen, is dat die oplosbaarheid reeds binnen G geldt. De raakruimte van G in a is $a\Gamma$, dus is er in elk punt $a \in G$ een richting $\frac{da}{dt} = aA$ in een raakruimte te vinden; het richtingsveld

$$\frac{da_t}{dt} = a_t A$$

gelegen op de groepvarieteit G is dus binnen G integreerbaar en onder meer is er een oplossing met $a_0 = 1$.

Hieruit volgt $b_t = a_t$, dus $e^{tA} \in G$.

Wat we hier voor A hebben gedaan, geldt voor alle elementen van Γ , en nog meer: Zij (als in 5.1.3)

$$A_\nu = \left(\frac{\partial a}{\partial \tau_\nu} \right)_0, \quad \nu = 1, \dots, r$$

een basis van Γ .

$$e^{\sum \sigma_\nu A_\nu} = 1 + \sum \sigma_\nu A_\nu + \dots$$

is een punt

$$a(\tau_1, \dots, \tau_r) = 1 + \sum \tau_\nu A_\nu + \dots$$

van G . Dit leidt tot een afbeelding in de buurt van $(0, \dots, 0)$

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_r)$$

met functionaal-matrix 1, dus een "1-1-afbeelding op". Dus stemmen e^Γ en G in de buurt van 1 overeen.

We kunnen de $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ als nieuw parametersysteem in de buurt van 1 gebruiken - een "kanonisch" parametersysteem. G wordt hierin voorgesteld door

$$e^{\sum \sigma_\nu A_\nu}.$$

In de nieuwe parameters is G zelfs analytisch.

G wordt in de buurt van 1 overdekt door eenledige ondergroepen

$$e^{\sum_{\nu} \sigma_{\nu} A_{\nu}},$$

zodat er door elk punt $\neq 1$ precies één gaat.

Tenslotte is gebleken, dat G (in het klein) door Γ volledig is bepaald.

Over heel G hoeven deze dingen niet te gelden.

Tegenvoorbeeld: G bestaat uit 2-bij-2 matrices met $\det = 1$, waarbij ook complexe coëfficiënten kunnen worden toegelaten. Γ bestaat dus uit de A -en met $\chi(A) = 0$. Bezit A gelijke eigenwaarden, dan moeten deze dus 0 zijn, die van e^A dus beide 1 . Zij $a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. a kan niet op de diagonaalvorm worden gebracht. Was nu $a = e^A$ ($A \in \Gamma$), dan zou hetzelfde voor A gelden, dus zou A gelijke eigenwaarden hebben, dus beide $= 0$, dus zouden die van a beide 1 zijn, terwijl ze in werkelijkheid -1 zijn. Dus is $a \notin e^{\Gamma}$.

8. We beschouwen nu twee lin Liesche groepen G en H en een homomorfisme Θ van G in H , waarvan we nog veronderstellen, dat hij ook twee keer continu differentieerbaar is. Θ induceert een lineaire afbeelding van de raakruimte Γ van G in de raakruimte Δ van H , en wel beantwoordt aan

$$A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0 \in \Gamma$$

$$\Theta A = \left(\frac{d\Theta a_t}{dt} \right)_0 \in \Delta.$$

Maar eveneens beantwoordt aan

$$[A, B] = \frac{1}{2} \left(\frac{da_t b_t a_t^{-1} b_t^{-1}}{dt^2} \right)_0$$

$$\Theta [A, B] = \frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta(a_t b_t a_t^{-1} b_t^{-1})}{dt^2} \right)_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d((\Theta a_t)(\Theta b_t)(\Theta a_t)^{-1}(\Theta b_t)^{-1})}{dt^2} \right)_0 =$$

$$= [\Theta A, \Theta B].$$

Θ is dus niet alleen lineair, maar ook ring-homomorfisme.

Een Θ , die een Γ op een Δ lineair afbeeldt zodat $[\Theta A, \Theta B] = \Theta[A, B]$ wordt algemeen een homomorfisme van inf. groepen genoemd.

Is θ t.o.v. $G \rightarrow H$ een isomorfe afbeelding resp. een afbeelding op, dan geldt hetzelfde t.o.v. $\Gamma \rightarrow \Delta$.

Speciaal beschouwen we de inwendige automorfismen van G . Bij elke c hoort een inwendig automorfisme van G

$$a \rightarrow cac^{-1}, \quad (1)$$

dat we ook $\tilde{c}$ noemen, dus

$$\tilde{c}a = cac^{-1}.$$

De $\tilde{c}$ vormen een groep $\tilde{G}$, de geadjungeerde groep van G . Want

$$\tilde{c}_1(\tilde{c}_2 a) = c_1(c_2 a c_2^{-1})c_1^{-1} = (c_1 c_2) a (c_1 c_2)^{-1} = \widetilde{c_1 c_2} a,$$

dus

$$\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 = \widetilde{c_1 c_2}, \quad (2)$$

d.w.z. het product van twee elementen van $\tilde{G}$ is weer in $\tilde{G}$. Verder is $\tilde{1}$ het éénelement van $\tilde{G}$ en wegens

$$\widetilde{\tilde{c}^{-1}} = \widetilde{c c^{-1}} = \tilde{1}$$

is $\widetilde{c^{-1}}$ het inverse van $\tilde{c}$.

Door

$$c \rightarrow \tilde{c}$$

is G op $\tilde{G}$ afgebeeld, en dit is een homomorfisme (zie 2). De kern van dit homomorfisme is het centrum van G .

Het automorfisme (1) van G in G induceert een ringautomorfisme van Γ in Γ , te weten: is

$$A = \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0,$$

dan is

$$\tilde{c}A = \left(\frac{d(\tilde{c}a_t)}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d(ca_t c^{-1})}{dt} \right)_0 = c \left(\frac{da_t}{dt} \right)_0 c^{-1},$$

dus

$$\tilde{c}A = cAc^{-1}.$$

Dat $\tilde{c}$ een automorfisme is, is ook direct te zien, b.v.

$$c[A, B]c^{-1} = c(AB - BA)c^{-1} = cAc^{-1}cBc^{-1} - cBc^{-1}cAc^{-1} = [cAc^{-1}, cBc^{-1}].$$

Deze $\tilde{c}$ ($\Gamma \rightarrow \Gamma$) vormen weer een groep, die we ook weer de geadjungeerde groep van G (precieser de lineaire geadjungeerde groep) en ook weer met $\tilde{G}$ aanduiden. Als boven geldt (2).

Daar $\tilde{G}$ een groep van lin.afb. van Γ in Γ is kunnen we er die algebra $\tilde{\Gamma}$ van trachten te vormen. We kiezen dus een kromme $\tilde{c}_t$ in $\tilde{G}$ met $\tilde{c}_0 = \tilde{1}$ en $\left(\frac{d\tilde{c}_t}{dt} \right)_0 = C$ en vormen $\left(\frac{d\tilde{c}_t}{dt} \right)_0 = \tilde{C}$.

$$\left(\frac{d\tilde{c}_t}{dt} \right)_0 A = \left(\frac{d\tilde{c}_t A}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d(c_t A c_t^{-1})}{dt} \right)_0 = CA - AC,$$

dus

$$\tilde{C}A = [C, A].$$

Uit deze afbeelding $\tilde{C}$ van Γ in Γ is $\tilde{\Gamma}$ gevormd.

We kunnen dit proces generaliseren. I.p.v. inwendige kunnen we willekeurige automorfismen van Γ beschouwen. Zij θ_t een schaar van automorfismen van Γ met $\theta_0 = 1$. Dan is $\Omega = \left(\frac{d\theta_t}{dt}\right)_0$ geen automorfisme van Γ , maar uit

$$\theta_t[A, B] = [\theta_t A, \theta_t B]$$

volgt door differentiatie

$$\Omega[A, B] = [\Omega A, B] + [A, \Omega B].$$

Een lineaire operator met deze eigenschap heet een inf. automorfisme of een derivator. Uiteraard is ook $\tilde{C}$ een derivator. Dit is ook rechtstreeks te zien

$$\tilde{C}[A, B] = [\tilde{C}A, B] + [A, \tilde{C}B]$$

is namelijk niets anders dan de Jacobirelatie.

Dat de $\tilde{C}$ een Lie-algebra vormen, is ook weer direct te zien:

$$\begin{aligned} (\alpha \tilde{C})A &= \alpha(CA - AC) = (\alpha C)A - A(\alpha C) = [\alpha C, A] = (\widetilde{\alpha C})A, \\ (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)A &= \tilde{C}_1 A + \tilde{C}_2 A = C_1 A - AC_1 + C_2 A - AC_2 \\ &= (C_1 + C_2)A - A(C_1 + C_2) = \widetilde{C_1 + C_2} A \\ [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2]A &= \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 A - \tilde{C}_2 \tilde{C}_1 A = [C_1, [C_2 A]] - [C_2, [C_1 A]] = \\ &(\text{Jacobi}) \quad [[C_1, C_2], A] = \widetilde{[C_1, C_2]} A. \end{aligned}$$

Tevens volgt hieruit, dat

$$C \rightarrow \tilde{C}$$

een homomorfisme van Γ op $\tilde{\Gamma}$ is.

9. We gaan nu uit van een willekeurige Lie-algebra Γ van lin. afb. We laten zien, dat hierbij een Lie-groep G hoort, die Γ als inf. algebra bezit. Uiteraard trachten we G uit e^Γ te construeren. Uit

$$\frac{d}{dt} (e^{tC} A e^{-tC}) = [C, e^{tC} A e^{-tC}]$$

volgt door herhaalde toepassing en reeksontwikkeling

$$e^{tC} A e^{-tC} = A + \frac{t}{1!} [C, A] + \frac{t^2}{2!} [C, [C, A]] + \dots = e^{t\tilde{C}} A,$$

dus

$$e^{\tilde{C}} A = e^C A e^{-C} \in \Gamma. \quad (1)$$

Straks hebben we nog nodig

$$K = \int_0^1 e^{s\tilde{C}} ds = 1 + \frac{1}{2!} \tilde{C} + \frac{1}{3!} \tilde{C}^2 + \dots = \frac{e^{\tilde{C}} - 1}{\tilde{C}}.$$

K is 1-1 voor kleine C. Precieser: wil det K = 0 zijn, dan moet een eigenwaarde van K verdwijnen. De eigenwaarden van K drukken zich in die van $\tilde{C}$ als volgt uit: zijn λ die van $\tilde{C}$, dan zijn $\frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$ die van K. Dus alleen eigenwaarden $2n\pi i$ van $\tilde{C}$ kunnen tot verdwijnende van K aanleiding geven. We kiezen in Γ een bolomgeving U van 0 zodat voor $C \in U$ geldt: alle eigenwaarden van $\tilde{C}$ zijn absoluut $< 2\pi$. Voor $C \in U$ is K éénéén.

We vormen de variëteit e^U en tonen aan, dat in elk zijner punten e^C ($C \in U$) de tangentiaalruimte net (de gewenste) $e^C \Gamma$ is. We trekken door e^C een differentieerbare kromme $e^{C(t)}$ met $C(t) \in U$, $C(0)=C$. We tonen aan, dat

$$\left(\frac{de^{C(t)}}{dt} \right)_0 \in e^C \Gamma.$$

Stel: $e^{-sC(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{sC(t)} = Y(t, s),$

differentiër dit naar s (onder verwisseling van de differentiaties naar s en t):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} &= e^{-sC(t)} C(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{sC(t)} + e^{-sC(t)} \frac{\partial}{\partial t} (C(t) e^{sC(t)}) \\ &= e^{-sC(t)} \frac{dC(t)}{dt} e^{sC(t)} \in \Gamma \end{aligned}$$

(wegens (1)). Integratie naar s geeft

$$Y(t, 1) = \int_0^1 e^{-sC(t)} \frac{dC}{dt}(t) e^{sC(t)} ds \in \Gamma,$$

dus

$$\left(\frac{d}{dt} e^{C(t)} \right)_0 \in e^C \Gamma.$$

We tonen verder aan, dat bij geschikte keuze van $C(t)$ (met $C(0)=C$) de variëteit $e^C \Gamma$ uitgeput wordt.

Stel $C(t) = C + tB$. Dan wordt

$$e^{-C} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{C(t)} \right)_0 = Y(0, 1) = \int_0^1 e^{-sC} B e^{sC} ds = \int_0^1 e^{-s\tilde{C}} ds B$$

en dit doorloopt (bij vaste C) met B de hele Γ , indien $C \in U$ blijft (zie het boven gezegde over K). Dus doorloopt

$$\left(\frac{d}{dt} e^C(t)\right)_0 \text{ heel } e^C \Gamma.$$

We weten nu, dat e^U in elk zijner punten e^C een variëteit is met raakvariëteit $e^C \Gamma$. We tonen nu aan: Voor elke $A \in U$ is er een bolomgeving V van 0 in Γ zodat

$$e^A e^V \subset e^U$$

is. Stel

$$c(t) = e^A e^{tB}.$$

Dit voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)B \quad (2)$$

met beginvoorwaarde

$$c(0) = e^A. \quad (3)$$

In elk punt e^C van e^U kunnen we de richting $e^C B$ uit de raakvariëteit $e^C \Gamma$ van e^U voorschrijven. Dit vectorveld op e^U kunnen we op e^U integreren tot een oplossing van

$$\frac{d}{dt} e^C(t) = e^C(t)B \quad (4)$$

met

$$C(0) = A. \quad (5)$$

Precieser (4-5) heeft een oplossing ($0 \leq t \leq 1$) voor voldoende kleine B , zeg $B \in$ zekere V , die van A afhangt. De oplossing is uniek, dus (vergelijk 2-3 met 4-5)

$$c(t) = e^C(t) e^U,$$

$$c(1) = e^C(1) e^U,$$

$$e^A e^B e^U,$$

$$e^A e^V \subset e^U.$$

Merk verder op, dat met $a \in e^U$ ook $a^{-1} \in e^U$, indien we van U eisen, dat $U = -U$.

e^U is nu, wat we een groepkiem zullen noemen; in e^U is ab^{-1} niet onbeperkt gedefinieerd, maar bij elke a is voor b een omgeving van 1 toegelaten. We moeten e^U tot een groep G uitbreiden. G is algebraïsch gedefinieerd, als de door e^U voortgebrachte groep. We moeten G nog topologiseren. Dit geschiedt door de eis, dat in de buurt van elke $a \in G$ de topologie van ae^U heerst. Precieser:

Laat b_1 en b_2 lin.afb. met $\det b_1 \neq 0$, $\det b_2 \neq 0$ zijn. Dan is $b_1 e^U \cap b_2 e^U$ open in $b_1 e^U$ en in $b_2 e^U$. Immers, zij $a \in b_1 e^U \cap b_2 e^U$, dan is $b_1^{-1} a \in e^U$, dus is er een V_1 als daarstraks met $b_1^{-1} a e^{V_1} \subset e^U$; noemen we V de kleinste onder de V_1, V_2 , dan is $a e^V \subset b_1 e^V$, dus $a e^V \subset b_1 e^V \cap b_2 e^V$, maar dan is $a e^V$ een omgeving van a , die in $b_1 e^V \cap b_2 e^V$ ligt.

Hieruit volgt: is M open in $b_1 e^U$, dan is $M \cap b_2 e^U$ open in $b_2 e^U$. We stellen nu vast: een verzameling M van G heet open, als zijn doorsnede met elke $a e^U$ ($a \in G$) open is. Dat is een topologie in G , die op grond van het voorafgaande in elke $a e^U$ de daar reeds aanwezige topologie induceert.

G wordt op deze manier een analytische variëteit en een Lie-groep met kiem e^U , dus met de infinitesimale algebra Γ .

10. We laten nog zien: Ieder ringhomomorfisme θ , $\theta \Gamma \subset \Delta$, van inf.lin. Lie-groepen laat zich uitbreiden tot een homomorfisme van bijbehorende kiemen. (Over de hele groepen hoeft dit niet te lukken.) We vormen

$$A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \theta(A) \end{pmatrix} \text{ voor } A \in \Gamma.$$

De A^* vormen een nieuwe inf.ring, die volgens 9 tot een kiem kan worden uitgebreid, bestaande uit de

$$e^{A^*} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^{\theta(A)} \end{pmatrix}.$$

We hebben dus bij voldoende kleine A en B een C met

$$\begin{aligned} e^A e^B &= e^C \\ e^{\theta(A)} e^{\theta(B)} &= e^{\theta(C)}. \end{aligned}$$

Definiëren we $\theta(e^A) = e^{\theta(A)}$, dan is θ een homomorfisme van de kiemen, $\theta(e^\Gamma) \subset e^\Delta$. Is θ een isomorfisme resp. een afbeelding op t.o.v. $\Gamma \rightarrow \Delta$, dan geldt hetzelfde t.o.v. $e^\Gamma \rightarrow e^\Delta$.

11. We weten nu, dat groepkiem en Lie-ring elkaar wederzijds bepalen en wel zo dat aan isomorfe weer isomorfe beantwoorden. Er geldt echter meer:

Zij Γ een abstract gegeven Lie-ring (dus niet uit lineaire transformaties van enige ruimte bestaande), d.w.z.

1. Γ is r -dim.lin.ruimte,
2. Er is in Γ een "product" $[\dots, \dots]$ met
 - 2.1 $[\alpha A, B] = \alpha [A, B]$
 - 2.2 $[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B]$
 - 2.3 $[A, B] + [B, A] = 0$
 - 2.4 $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$

Dan is Γ isomorf met zekere Lie-algebra van lin.trsf. van zekere lin. ruimte.

We bewijzen dit hier niet. We beschouwen in 't vervolg alleen Liegroep-kiemen en Lie-algebra's van lin.trsf.

12. Is Γ de inf.algebra van G , Δ een subalgebra van Γ (d.w.z. $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$) en H de bij Δ horende Liegroep, dan is uiteraard $H \subset G$. Op een voldoende kleine kiem is de topologie van H de door G geïnduceerde. In het groot hoeft dit niet te gelden.

Voorbeeld:

$$G \text{ de groep van de } \begin{pmatrix} e^{it_1} & 0 \\ 0 & e^{it_2} \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \text{ reëel.}$$

$$H \text{ " " " " } \begin{pmatrix} e^{i\alpha s} & 0 \\ 0 & e^{i\beta s} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ vast reëel,} \\ \text{onderling onmeetbaar,} \\ s \text{ variabel reëel.} \end{array}$$

Volgens de in H vastgestelde topologie zijn die elementen van H "vlak bij 1", waarvoor $|s|$ klein is. Er zijn echter voor elke $\varepsilon > 0$ willekeurig grote s met $|e^{i\alpha s} - 1| < \varepsilon$ en $|e^{i\beta s} - 1| < \varepsilon$ te vinden, en in de zin van G bevinden de hierbij horende elementen van H zich ook in de buurt van 1.

13. Op algebraïsche wijze krijgt men dus sinusgroepen (kiemen) van de gegeven Lie-groep G . Men krijgt zodoende zelfs alle in het klein afgesloten ondergroepkiemen van G (nader te preciseren):

Zij G de Lie-groep en e^U een kiem van G . Van $H \subset G$ wordt verondersteld:

- 1) H is niet leeg, afgesloten deel van e^U ,
- 2) uit $a, b \in H$ en $ab^{-1} \in e^U$ volgt $ab^{-1} \in H$.

We tonen de existentie van een subalgebra Δ van Γ aan, zodat H en $e^{\Delta \cap U}$ in een omgeving van 1 met elkaar overeenstemmen.

Δ wordt als volgt gedefinieerd: $A \in \Delta$ dan en slechts dan, als er een rij $A_n \in \Gamma$ bestaat met

$$a_n = e^{A_n} \in H \text{ en } \lim a_n = 1,$$

en bovendien een rij positieve getallen α_n met

$$\lim \alpha_n A_n = A.$$

Merk op, dat $\lim A_n = 0$. Verder: is $A \neq 0$, dan moet noodzakelijk $\lim \alpha_n = \infty$ zijn.

In deze definitie hadden we ons tot rijen natuurlijke getallen kunnen beperken. Immers, met $p_n = [\alpha_n]$ is (voor $A \neq 0$) $\lim p_n A_n = \lim \alpha_n A_n + \lim (p_n - \alpha_n) A_n$, en de laatste limiet is 0.

We bewijzen: voor alle $A \in \Delta \cap U$ is $e^A \in H$. $A = \lim p_n A_n$, $e^{A_n} \in H$ (zie boven). Verder $e^{p_n A_n} = (e^{A_n})^{p_n} \in H$ voor bijna alle n , dus wegens de afgeslotenheid van H ook $\lim e^{p_n A_n} = e^A \in H$. Hierbij is de bewering $(e^{A_n})^{p_n} \in H$ (bijna alle n) instructief te bewijzen: Wegens $A \in U$ zijn bijna alle $p_n A_n \in U$, dus $p A_n \in U$ voor alle natuurlijke $p \leq p_n$; is nu al $(e^{A_n})^p \in H$, dan is naar veronderstelling 2 omtrent H ook $(e^{A_n})^p e^{A_n} \in H$.

We bewijzen verder: Is $c(s)$ een differentieerbare kromme op H met $c(0)=1$, dan is $(\frac{dc(s)}{ds})_{s=0} \in \Delta$. Immers $c(s) = e^{C(s)}$, waarbij $C(s)$ een differentieerbare kromme in U is. $c'(0) = C'(0) = \lim_n n C(\frac{1}{n}) \in \Delta$.

We bewijzen, dat Δ een Lie-algebra is. Uit $A \in \Delta$ volgt $\alpha A \in \Delta$ triviaal volgens definitie. Zij $A, B \in \Delta$. Dan weten we al: $e^{sA}, e^{sB} \in H$ voor kleine s (namelijk voorzover $sA, sB \in U$ zijn). Dus voor voldoende kleine s ook $e^{sA} e^{sB} = c(s) \in H$. Dus ook $A+B = (\frac{dc(s)}{ds})_0 \in \Delta$. Evenzo: $c(s) = e^{sA} e^{sB} e^{-sA} e^{-sB} \in H$, dus $[A, B] = (\frac{dc(s)}{ds^2})_0 \in \Delta$.

We moeten nu nog bewijzen, dat H in de buurt van 1 door $e^{\Delta \cap U}$ wordt uitgeput. In Γ kiezen we een basis $A_1, \dots, A_r$, zodat $A_1, \dots, A_q$

een basis van Δ vormen. In de nabijheid van 1 geldt

$$e^{\tau_1 A_1 + \dots + \tau_q A_q} e^{\tau_{q+1} A_{q+1} + \dots + \tau_r A_r} = e^{\sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_r A_r},$$

waarbij de σ functies van de τ zijn. Reeksontwikkeling toont aan

$$\begin{aligned} (1 + \tau_1 A_1 + \dots + \tau_q A_q + \dots)(1 + \tau_{q+1} A_{q+1} + \dots + \tau_r A_r + \dots) = \\ = 1 + \sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_r A_r + \dots, \end{aligned}$$

dus

$$\sigma_i = \tau_i + \dots$$

zodat de functionaaldeterminant van $\tau \rightarrow \sigma$ in de buurt van 1 ligt, dus $\neq 0$ is. De $\tau_1, \dots, \tau_r$ zijn derhalve in plaats van de $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ als coördinaten bruikbaar. Met $\tau_{q+1} = \dots = \tau_r = 0$ wordt in dat coördinatensysteem de door e^Δ voortgebrachte Liegroep in de buurt van 1 beschreven; door $\tau_{q+1} = \text{const}, \dots, \tau_r = \text{const}$ een rechtsnevenklasse.

Stel H had in elke nabijheid van 1 nog elementen $\notin e^{\Delta \cap U}$, zeg met de coördinaten $\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_r^{(n)}$ (die naar 0 convergeren). Nu is ook het punt met de coördinaten $\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_q^{(n)}, 0, \dots, 0$ in H , dus ook dat met $0, \dots, 0, \tau_{q+1}^{(n)}, \dots, \tau_r^{(n)}$ in H . Stel

$$\begin{aligned} B_n &= \tau_{q+1}^{(n)} A_{q+1} + \dots + \tau_r^{(n)} A_r \\ \alpha_n &= (\tau_{q+1}^{(n)2} + \dots + \tau_r^{(n)2})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nu hebben $\alpha_n B_n$ coëfficiënten, die begrensd zijn, maar niet allemaal tot 0 naderen. Er is dus een deelrij van $\alpha_n B_n$ met de limiet $B \neq 0$, dus volgens definitie $B \in \Delta$. Gezien het verdwijnen van de eerste q coëfficiënten is echter $B \notin \Delta$. Dus is er een omgeving van 1 waarin $e^{\Delta \cap U}$ met H overeenstemt.

Uit de bewezen stelling volgt onder meer, dat elke afgesloten verzameling G van lin.trsf. van een lin. ruimte met de eigenschap, dat voor a, b in de buurt van 1 uit $a, b \in G$ volgt $ab^{-1} \in G$, in de nabijheid van 1 met een Liegroep van lin.trsf. samenvalt.

Door het voorafgaande wordt gerechtvaardigd, waarom wij ons in de theorie der Liegroepen zullen beperken tot ondergroepen, die door een subalgebra worden voortgebracht.

14. Gegeven twee Liegroepen G en G' met de Lie-algebra's Γ en Γ' . Zij ze in lineaire ruimten R en R' voorgesteld, dan is het directe product $G \times G'$ in de directe som $R \dot{+} R'$ voorgesteld: een element (a, a') van $G \times G'$ werkt op R volgens a , op R' volgens a' , dus $(a, a')(x \dot{+} x') =$

$= ax + a'x'$. De Lie-algebra van $G \times G'$ is de directe som $\Gamma + \Gamma'$: $(A + A')(x + x') = Ax + A'x'$, $[A + O, O + A'] = 0$. In 't vervolg schrijven we A i.p.v. $A + O$, A' i.p.v. $O + A'$.

We beschouwen weer een homomorfisme φ van G in G' , veronderstellen echter alleen dat φ continu (niet noodzakelijk differentieerbaar is). We bewijzen dan dat φ vanzelf analytisch en door een homomorfisme van Γ in Γ' geïnduceerd is. We behoeven van φ trouwens ook alleen te veronderstellen, dat het in een nabijheid van 1 (op een kiem e^U) in G is gedefinieerd.

De elementen $(a, \varphi(a))$ vormen een verzameling H . Nu is $(a, \varphi(a)) \cdot (b, \varphi(b))^{-1} = (ab^{-1}, \varphi(ab^{-1}))$ weer in H (eigenschap van homomorfisme). Verder, als $(a_n, \varphi(a_n)) \in H$ en $\lim(a_n, \varphi(a_n)) = (a, a') \in e^U$ is, geldt $\lim a_n = a$, $\lim \varphi(a_n) = a'$, dus (continuïteit van φ): $\varphi(a) = a'$. Dus ook $(a, a') \in H$.

Bij H hoort dus een Lie-algebra $\Delta \subset \Gamma + \Gamma'$. In een nabijheid van 1 stemt de verzameling van de $(a, \varphi(a))$ overeen met die van de $e^{A+A'}$ ($A+A' \in \Delta$). Wegens $e^{A+A'} = (e^A, e^{A'})$ is dus $e^{A'} = \varphi(e^A)$ en hoort er bij elke A één A' met $A+A' \in \Delta$. We stellen $A' = \varphi(A)$ dan en slechts dan als $A+A' \in \Delta$ is.

Met $A + \varphi A$ is ook $\alpha A + \alpha \varphi(A) \in \Delta$, dus $\varphi(\alpha A) = \alpha \varphi(A)$. Met $A + \varphi(A)$ en $B + \varphi(B)$ is ook $A+B + \varphi(A) + \varphi(B) \in \Delta$, dus $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; verder $[A + \varphi(A), B + \varphi(B)] \in \Delta$, dus $\varphi[A, B] = [\varphi A, \varphi B]$. Dus is φ een homomorfisme van Γ in Γ' . Wegens $e^{A + \varphi A} = (e^A, e^{\varphi A}) = (e^A, \varphi e^A)$ is $\varphi e^A = e^{\varphi A}$, dus brengt $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ de gegeven $\varphi: G \rightarrow G'$ voort. We zagen al in 10, dat φ dan een analytisch homomorfisme van G in G' is.

15. Zij H de door de subalgebra Δ van Γ voortgebrachte ondergroep van G . Dan en slechts dan is H normaaldeler van G , als Δ ideaal van Γ is (d.w.z. $[\Gamma, \Delta] \subset \Delta$).

Immers "H is normaaldeler" betekent "H is invariant bij de geadjungeerde groep van G ". Verkeert H in deze omstandigheid, dan is de inf. algebra Δ van H invariant bij de inf. algebra van de geadjungeerde groep, dus $\tilde{A}\Delta \subset \Delta$ voor $A \in \Gamma$, dus $[\Gamma, \Delta] \subset \Delta$. Omgekeerd als $[\Gamma, \Delta] \subset \Delta$, dan $\tilde{A}\Delta \subset \Delta$ voor $A \in \Gamma$, dus $e^{\tilde{A}}\Delta \subset \Delta$, dus $a\Delta a^{-1} \subset \Delta$ voor $a \in G$, dus $aCa^{-1} \in \Delta$ voor $a \in G$, $C \in \Delta$, dus $ae^Ca^{-1} \in e^\Delta$ voor $a \in G$, $C \in \Delta$, dus $aHa^{-1} \subset H$.

Een centrumelement van G is gekenmerkt door de eigenschap, bij alle inwendige automorfismen van G invariant te zijn. Het centrum van G is afgesloten. Er hoort een subalgebra Δ bij. Deze Δ brengt

een in G afgesloten Lie-ondergroep H van G voort. H behoeft het centrum van G niet uit te putten. Dit kan uit een aantal losse variëteiten bestaan, die zich nergens verdichten (anders zouden ze zich ook in de nabijheid van 1 verdichten). De elementen Z van Δ zijn gekenmerkt door $\tilde{Z}\Gamma=0$, d.w.z. $[Z,\Gamma]=0$.

Speciaal is G abels, dan en slechts dan als $[\Gamma,\Gamma]=0$. We noemen dan ook Γ abels. Is G abels, dan brengt elk onafhankelijk k -tal elementen $A_1, \dots, A_k$ van Γ een Lie-algebra, bestaande uit de $\sum_1^k \alpha_v A_v$, voort, dus ook een k -dim. Liegroep.

Is G abels, dan laten de elementen van G in de buurt van 1 zich met betrekking tot de basis $A_1, \dots, A_r$ schrijven als $e^{\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r} = e^{\alpha_1 A_1} \dots e^{\alpha_r A_r}$, dus is G in 't klein direct product van r eindim. groepen.

Algemener: Zij $G = G_1 \times G_2$ (zie 14) en zijn $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ de Lie-algebras van G, G_1, G_2 , dan is wegens het commuteren van G_1 en G_2 ook $[\Gamma_1, \Gamma_2]=0$. Anderzijds $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Verder $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = (0)$. Men zegt op grond van deze drie eigenschappen ook, dat Γ directe som van Γ_1 en Γ_2 is. Dus: is G direct product (althans in het klein) van G_1 en G_2 , dan is Γ directe som van Γ_1 en Γ_2 . Het omgekeerde geldt ook (in het klein), want $a \in G$ in de nabijheid van 1 is eenduidig te schrijven als e^A met $A \in \Gamma$. Nu is $A = A_1 + A_2$ met $A_i \in \Gamma_i$, dus $e^A = e^{A_1 + A_2} = e^{A_1} e^{A_2}$.

De door $[\Gamma, \Gamma]$ voortgebrachte lin.deelruimte van Γ is een ideaal, want $[\Gamma, [\Gamma, \Gamma]] \subset \Gamma$. Dit is het "commutator-ideaal" van Γ , ook $C(\Gamma)$ genaamd. $C(\Gamma)=(0)$ betekent, dat Γ abels is.

Bij G kan men de door de commutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ voortgebrachte normaaldeeler vormen, de commutatorgroep $C(G)$ van G . $C(G)=(1)$ dan en slechts dan als G abels is.

Uit het bewijs van 4.2 in 5 volgt, dat de inf.algebra van $C(G)$ op zijn minst $C(\Gamma)$ bevat. We tonen nu aan, dat de inf. algebra van $C(G)$ precies $C(\Gamma)$ is oftewel dat de algebra $C(\Gamma)$ juist de Lie-groep $C(G)$ voortbrengt.

Allereerst merken we op, dat uit $a \in G, B \in \Gamma$ volgt $aBa^{-1}B \in C(\Gamma)$. Voor $a = e^A$ ($A \in \Gamma$) volgt dit uit de machtreeksontwikkeling in 9. Voor een willekeurige $a = a_k a_{k-1} \dots a_1$ ($a_v = e^{A_v}$) volgt dit door beschouwing van de som van de uitdrukkingen $a_i B_{i-1} a_i^{-1} B_{i-1}$, waarbij $B_i = a_i B_{i-1} a_i^{-1}$.

We nemen nu twee krommen $a(t), b(t)$ in G met $a(0)=b(0)=1$ en

$$\frac{da(t)}{dt} = a(t)A(t), \quad \frac{db(t)}{dt} = b(t)B(t) \text{ waarbij dus } A(t), B(t) \in \Gamma.$$

Verder is

$$\frac{da(t)^{-1}}{dt} = -A(t) a(t)^{-1}, \quad \frac{db(t)^{-1}}{dt} = -B(t) b(t)^{-1}.$$

We differentiëren nu

$$c(t) = a(t)b(t)a^{-1}(t)b^{-1}(t),$$

waarbij we voor het gemak de t weglaten:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= aAba^{-1}b^{-1} + abBa^{-1}b^{-1} - abAa^{-1}b^{-1} - aba^{-1}Bb^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1}((ba^{-1}b^{-1})^{-1}A(ba^{-1}b^{-1}) + (a^{-1}b^{-1}B(a^{-1}b^{-1}) \\ &\quad - (a^{-1}b^{-1})^{-1}A(a^{-1}b^{-1}) - bBb^{-1}) \\ &= c(t)C(t), \end{aligned}$$

waarbij naar het voorgaande $C(t) \in C(\Gamma)$. Hieruit volgt als in 9, dat $c(t)$ voor alle t in de door $C(\Gamma)$ voortgebrachte Liegroep ligt, dus voor alle $a, b \in G$ is $aba^{-1}b^{-1}$ in de door $C(\Gamma)$ voortgebrachte Liegroep.

16. Zij Γ (abstracte) Lie-algebra, Δ ideaal van Γ . Dan is $\Gamma \bmod \Delta$ weer een abstracte Lie-algebra. De elementen van $\Gamma \bmod \Delta$ zijn per definitie de restklassen $A+\Delta$; de algebra-operaties zijn zinvol gedefinieerd door $\alpha(A+\Delta) = \alpha A + \Delta$, $(A+\Delta) + (B+\Delta) = (A+B) + \Delta$, $[A+\Delta, B+\Delta] = [A, B] + \Delta$; de axioma's van Lie-algebra zijn zonder meer in te zien.

Zij Γ de Lie-algebra van G , Δ die van de ondergroep H . Tussen $\Gamma \bmod \Delta$ en G/H bestaat een verband, dat wij zouden kunnen beschrijven als " $\Gamma \bmod \Delta$ is de Lie-algebra van G/H ", indien wij ons niet hadden beperkt tot lineaire Lie-groepen. Wel kunnen we aantonen: Zij $A \in \Gamma$ en U een voldoende kleine omgeving van 0 in Γ (afhankelijk van A), dan stemt $e^{A+\Delta} \cap U$ in een omgeving van e^A met de nevenklasse $e^A H$ overeen. Dit wordt als volgt ingezien:

Voor $B \in \Delta \cap U$ beschouwen we

$$a(t) = e^{-tA} e^{t(A+B)},$$

$$\frac{da(t)}{dt} = e^{-tA} B e^{t(A+B)} = B_t e^{-tA} e^{t(A+B)} = B_t a(t),$$

indien

$$B_t = e^{-tA} B e^{tA}$$

is gesteld. Omdat Δ ideaal in Γ , dus invariant bij inwendige automorfismen van ϵ is, is $B_t \in \Delta$, dus heeft de vergelijking

$$\frac{da(t)}{dt} = B_t a(t), \quad a(0) = 1,$$

zijn oplossing

$$a(t) \in H,$$

dus

$$e^{t(A+B)} \in e^{tA} H$$

dus

$$e^{A+B} \in e^A H.$$

(Merk op, dat met B ook B_t ($0 \leq t \leq 1$) zo dicht bij 0 ligt, dat de oplossing van de differentiaalvergelijking bestaat.) Dat $e^{A+\Delta} \cap U$ een omgeving van e^A in $e^A H$ uitput, volgt als vroeger uit dimensie-argumenten.

17. Een groep G heet oplosbaar, als de rij van zijn commutator-groepen in eindig veel stappen met (1) eindigt. Analooch heet een (abstracte) Lie-algebra oplosbaar, als de rij van zijn commutator-algebras met (0) eindigt. (In de taal der algebras heet dit ook nilpotent.) Uit het verband tussen commutator-groep en commutator-algebra volgt dat voor een Lie-groep G en zijn Lie-algebra Γ de twee

begrippen oplosbaar elkaar impliceren.

Merk op, dat de commutator-groep (-algebra) van $G(\Gamma)$ de kleinste ondergroep (subalgebra) met abelse factorgroep (restklassen-algebra) is.

We bewijzen in 19 (20):

Stelling van Lie: Een oplosbare lineaire Liegroep (algebra) bezit een simultane eigenvector in R (als $\dim R > 0$).

We behoeven dit eigenlijk alleen voor groepen of voor algebras te bewijzen. Voor groepen is het bewijs iets doorzichtiger. Het wordt onafhankelijk van de Liegroepen-theorie gevoerd. We bewijzen algemener (feitelijk is dit niet algemener):

Zij G een oplosbare lineaire groep, waarin elk element met 1 door een continue weg kan worden verbonden. Dan bezit G een simultane eigenvector.

18. Hulpstelling: Zij G een verzameling van onderling commuterende lin. afb. van R in zich ($\dim R > 0$). Dan bezit G een simultane eigenvector.

Bewijs: We kunnen ons G meteen aangevuld denken tot een lineaire ruimte met basis $a_1, \dots, a_r$ (lin. afb. van R in R). We veronderstellen dat $a_1, \dots, a_{k-1}$ al een simultane eigenvector $x \in R$ bezitten en construeren er een voor $a_1, \dots, a_k$. Zij dus

$$a_i x = \lambda_i x \quad \text{voor zekere } x \neq 0 \text{ en alle } i=1, \dots, k-1.$$

Zij L de lineaire deelruimte van R bestaande uit alle $z \in R$ met

$$a_i z = \lambda_i z \quad \text{voor alle } i=1, \dots, k-1.$$

Stel voor $z \in L$: $a_k z = y$.

Dan is $a_i y = a_i a_k z = a_k a_i z = \lambda_i a_k z = \lambda_i y$ voor $i=1, \dots, k-1$,

dus $y \in L$,

dus $a_k L \subset L$.

a_k kan dus als lin. afb. van L in zichzelf worden opgevat en bezit als zodanig een eigenvector $x' \neq 0$ met

$$a_k x' = \lambda_k x',$$

maar naar het voorafgaande is ook

$$a_i x' = \lambda_i x' \quad \text{voor } i=1, \dots, k-1.$$

Hiermee is de hulpstelling door inductie bewezen.

19. Bewijs der stelling uit 17. Merk op, dat met G ook de commutatorgroep G' de eigenschap van de verbindbaarheid bezit. We doen het weer per inductie. Een simultane eigenvector zij gevonden voor de commutatorgroep G' van G . We construeren er een voor G . Zij $x \neq 0$, $x \in R$,

$$ax = \lambda_a x \quad \text{voor } a \in G'.$$

Zij L de lin-deelruimte van alle z met

$$az = \lambda_a z \quad \text{voor } a \in G'.$$

Zij $c \in G$, $z \in L$,

$$cz = y.$$

Dan

$$ay = acz = c \cdot c^{-1} ac \cdot z = \lambda_{c^{-1}ac} y.$$

(Merk op dat $cac^{-1} \in G'$ is.) We kunnen de conclusie $y \in L$ niet onmiddellijk trekken, omdat de eigenwaarden $\lambda_{c^{-1}ac}$ en λ_a van a zouden kunnen verschillen. a heeft eindig veel $c^{-1}ac$ eigenwaarden; bij vaste a en c_t continu in t , $c_0=1$, $c_1=c$, hangt de functie $\lambda_{c_t^{-1}ac_t}$ continu van t af, kan echter slechts eindig veel waarden aannemen, is dus constant. Dus $\lambda_{c^{-1}ac} = \lambda_a$, dus

$$ay = \lambda_a y,$$

dus

$$y \in L,$$

dus

$$cL \subset L \quad \text{voor alle } c \in G.$$

We kunnen G nu als lineaire groep werkende in L opvatten. G' is hierbij voorgesteld door scalair-vermenigvuldigingen,

$$cx = \lambda_c x \quad \text{voor } c \in G'.$$

Aangezien G' commutatorgroep is, is $\det c=1$ voor $c \in G'$, dus moet λ_c eenheidswortel zijn. λ_c hangt echter continu van c af en is 1 voor $c=1$, dus is $\lambda_c=1$. Dus wordt G' in L triviaal voorgesteld. De voorstelling van G in L is er dus feitelijk een van G/G' . Nu is G/G' commutatief, bezit dus naar 18 een simultane eigenvector $x' \neq 0$,

z6 dat

$$cx' = \lambda_c x' \text{ voor } c \in G$$

is, hetgeen te bewijzen was.

20. Bewijs van de stelling van Lie voor Lie-algebras: We behoeven alleen de inductiestap van Γ' naar Γ te behandelen (Γ' commutator-algebra van Γ).

Zij x simultane eigenvector van $A \in \Gamma'$, dus

$$Ax = \lambda_A x \text{ voor } A \in \Gamma'; x \neq 0.$$

Zij L_p gedefinieerd door

$$z \in L_p \text{ dan en slechts dan als } (A - \lambda_A)^p z = 0 \text{ voor alle } A \in \Gamma'.$$

L_p is lin. deelruimte van R ; $L_{p-1} \subset L_p$ en

$$(A - \lambda_A)z \in L_{p-1} \text{ dan en slechts dan als } z \in L_p. \quad (1)$$

We bewijzen inductief

$$C L_p \subset L_{p+1} \text{ voor } C \in \Gamma,$$

$$\text{door } C L_{p-1} \subset L_p \quad " \quad " \quad (2)$$

te veronderstellen.

$$\text{Zij } z \in L_p, \quad Cz = y.$$

Dan is

$$(A - \lambda_A)y = (A - \lambda_A)Cz = [A, C]z + C(A - \lambda_A)z. \quad (3)$$

Nu is

$$[A, C] \in \Gamma',$$

en naar (1)

$$([A, C] - \lambda[A, C])z \in L_{p-1} \subset L_p,$$

$$\lambda[A, C]z \in L_p,$$

$$C(A - \lambda_A)z \in CL_{p-1} \subset L_p \text{ wegens (2).}$$

Dus volgt uit (3),

$$(A - \lambda_A)y \in L_p,$$

dus naar (1)

$$y \in L_{p+1},$$

waardoor

$$CL_p \subset L_{p+1} \quad (4)$$

bewezen is.

Uit 4 volgt: $L = \bigcup L_p$ is invariant bij Γ . We denken ons alle elementen van Γ als afbeeldingen tot L beperkt. In L hebben de elementen A van Γ' slechts de ene eigenwaarde λ_A . Anderzijds hebben zij, omdat Γ' een commutator-algebra is, allen het spoor 0. Dus $\lambda_A = 0$ voor $A \in \Gamma'$.

Nu blijkt zelfs $CL_1 \subset L_1$ voor $C \in \Gamma$, want voor

$$z \in L_1, \quad Cz = y, \quad A \in \Gamma'$$

geldt

$$Ay = ACz = [A, C]z + CAz,$$

verder

$$[A, C] \in \Gamma'$$

$$\Gamma' L_1 = (0),$$

dus

$$Ay = 0,$$

dus

$$y \in L_1.$$

Daar L_1 bij Γ invariant is, mogen we de elementen van Γ als afbeeldingen zelfs tot L_1 beperken. In L_1 wordt Γ' door 0 voorgesteld. De voorstelling in L_1 van Γ komt dus op een voorstelling van de abelse $\Gamma \bmod \Gamma_1$ neer, die volgens 18 een simultane eigenvector bezit. Deze is ook simultane eigenvector van Γ .

21.G (Γ) wordt weer oplosbaar verondersteld. Zij $G(\Gamma)$ in R voorgesteld. Zij x_1 een simultane eigenvector. In $R = R_1 \bmod x_1$ wordt een voorstelling geïnduceerd, met weer een simultane eigenvector x_2 . Enz. De vectoren $x_1, \dots, x_k$ spannen een lin. deelruimte S_k van R op. We hebben

$$ax_{k+1} = \lambda_a x_{k+1} \bmod S_k.$$

Op de basis $x_1, x_2, \dots$ krijgen de $a \in G$ ($A \in \Gamma$) simultaan de driehoeks-gedaante ∇ .

Stelling ("driehoeksstelling"): Een Liegroep (algebra) is dan en slechts dan oplosbaar als zijn elementen simultaan op de driehoeksgedaante kunnen worden gebracht.

"Slechts dan" is net bewezen. Om "dan" te bewijzen, hoeven we alleen aan te tonen:

Zij $G(\Gamma)$ de groep (algebra) van alle n -bij- n -driehoeksmatrices ∇ met determinant $\neq 0$ (blanco). Dan is $G(\Gamma)$ oplosbaar.

[Oplosbaarheid blijft namelijk bij overgang tot ondergroepen (subalgebra's) behouden.]

Zij Γ_i ($i=0,1,\dots$) de deelverzameling van Γ , bestaande uit die A , die ook nog nullen hebben in de hoofddiagonaal en de eerste $i-1$ schuine lijnen evenwijdig met en boven de hoofddiagonaal. Dus voor de matrixelementen α_{pq} van $A \in \Gamma_i$ geldt: $\alpha_{pq}=0$ voor $q \leq p+i-1$, $\Gamma_0 = \Gamma$. Uit de relatie

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] \subset \Gamma_{i+j+1}$$

volgt de oplosbaarheid van Γ .

Zij G_i de deelverzameling van G , bestaande uit de $1+A$ met $A \in \Gamma_i$. Dan is G_i normaaldeler van G_{i-1} en voor $a \in G_i$, $b \in G_j$ is $aba^{-1}b^{-1} \in G_{i+j+1}$. Hieruit volgt ook weer de oplosbaarheid van G .

22. Passen we de driehoeksstelling toe op de geadjungeerde voorstelling $\tilde{\Gamma}$ van de oplosbare (abstracte Lie-algebra) Γ , dan vinden we een basis $X_1, \dots, X_r$ zo dat

$$\tilde{A} X_{k+1} = \lambda_A X_{k+1} \bmod X_1, \dots, X_k,$$

dus als Γ_k de door $X_1, \dots, X_k$ opgespannen lin.ruimte is:

$$[\Gamma, \Gamma_i] \subset \Gamma_i.$$

Dus zijn de Γ_i idealen in Γ . Er is dus een opstijgende rij idealen Γ_i van Γ met $\dim \Gamma_i = i$.

23. Voor een (abstracte) Lie-algebra Γ beschouwen we de karakteristieke veelterm $\det(\tilde{A}-\lambda)$, terwijl $A \in \Gamma$ loopt. De eigenwaarden van $\tilde{A}$ (dus de wortels van $\det(\tilde{A}-\lambda)=0$) worden ook wortels van A genoemd. Dit zijn algebraïsche functies $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ op Γ . In

$$\det(\tilde{A}-\lambda) = \sum_{i=1}^r \varphi_{r-i}(A)(-\lambda)^i$$

zijn de coëfficiënten φ_{r-i} gehele rationale functies van de graad $r-i$ van A . Wegens

$$\det(\tilde{A}-\lambda) = \prod_{\nu=1}^r (\lambda_{\nu}(A)-\lambda) = (-\lambda)^r + \sum_{\nu} \lambda_{\nu}(A)(-\lambda)^{r-1} \\ + \sum_{\mu \neq \nu} \lambda_{\mu} \lambda_{\nu} (-\lambda)^{r-2} + \dots$$

heeft men

$$\varphi_1(A) = \sum \lambda_{\nu}(A) = \text{sp}(\tilde{A}), \\ \varphi_2(A) = (\sum \lambda_{\nu})^2 - \sum \lambda_{\nu}^2 = (\text{sp } \tilde{A})^2 - \text{sp } \tilde{A}^2,$$

enz. Merk op: $\varphi_r = \det \tilde{A} = 0$.

De veelterm $\det(\tilde{A}-\lambda)$ is t.a.v. de geadjungeerde groep invariant, want met $c=e^C$ is

$$\det(\tilde{cA}-\lambda) = \det(\widetilde{cAc^{-1}}-\lambda) = \det(\tilde{c}\tilde{A}\tilde{c}^{-1}-\lambda) \\ = \det \tilde{c}(\tilde{A}-\lambda)\tilde{c}^{-1} = \det(\tilde{A}-\lambda).$$

Dus zijn de φ_{r-1} invarianten van de geadjungeerde groep, dus ook van de geadjungeerde Lie-algebra (in de zin van derivaties). Dit is trouwens ook rechtstreeks te zien, b.v. geeft toepassing van $\tilde{C}$

$$A \rightarrow \tilde{C}A = [C, A],$$

op de kwadratische vorm $\text{sp } \tilde{A}^2$:

$$\text{sp}(\tilde{C}A)A + \text{sp } A(\tilde{C}A) = \text{sp}(CAA-ACA+ACA-AAC) = 0.$$

De kwadratische vorm $\text{sp } \tilde{A}^2$ (Killing-Cartan-vorm) speelt in 't vervolg een grote rol. Hierbij hoort nog de symmetrische bilineaire vorm ψ met

$$\psi(A, B) = \text{sp } \tilde{A} \tilde{B}$$

(symmetrisch omdat $\text{sp } XY = \text{sp } YX$ is).

24. Rang van Γ heet het maximaal aantal functioneel onafhankelijke onder de wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ of (wat op hetzelfde neerkomt) onder de coëfficiënten φ_j van de karakteristieke veelterm.

Zij deze rang 1. Voor elke keuze der getallen α_j heeft de variëteit der A met

$$\varphi_j(A) = \alpha_j \quad (j=1, \dots, r)$$

een dimensie $\leq r-1$. Elke dezer variëteiten is invariant bij de geadjungeerde groep, bevat dus met een punt X ook alle $e^{\tilde{C}}X$, $C \in \Gamma$. Dus heeft voor elke X de variëteit der $e^{\tilde{C}}X$ ($C \in \Gamma$) een dimensie

$\leq r-1$. De raakruimte in X aan deze laatste variëteit bestaat uit de $\tilde{C}X$ ($C \in \Gamma$); zijn dimensie is ook $\leq r-1$. Volgens $\tilde{C}X = -X\tilde{C}$ is dat hetzelfde als de beeldruimte van $\tilde{X}$, die dus een dimensie $\leq r-1$ heeft. Hieruit volgt, dat de nulruimte van $\tilde{X}$ een dimensie ≥ 1 heeft. Dus geldt:

Stelling: In een Lie-algebra van de rang 1 heeft elk element de wortel 0 met een multipliciteit ≥ 1 .

(Een merkwaardige stelling: als er veel onafhankelijke wortels zijn, zijn er ook veel verdwijnende.)

25. Lie-algebras van de rang 0 hebben in de karakteristieke veelterm uitsluitend verdwijnende coëfficiënten, dus alle wortels 0.

Eerste criterium voor oplosbaarheid: Γ is dan en slechts dan oplosbaar, als zijn commutatoralgebra Γ' de rang 0 heeft.

Bewijs: 1) Zij Γ oplosbaar; dan ook $\tilde{\Gamma}$ (als homomorf beeld van Γ). Neem $\tilde{\Gamma}$ in de driehoeksgedaante aan. Het is duidelijk, dat voor alle $A, B \in \Gamma$ de $[A, B]$ uitsluitend nullen in de hoofddiagonaal krijgt. Hetzelfde geldt dan voor elke $\tilde{C}$ met $C \in \Gamma'$. Dus alle wortels van $C \in \Gamma'$ verdwijnen.

2) Zij Γ' van de rang 0. Zij Δ maximale oplosbare subalgebra van Γ' . Δ is in Γ' vastgesteld door aan $A \in \Delta$ te laten beantwoorden de lin. afb.

$$X \rightarrow [A, X]$$

van Γ' in zichzelf (dus $X \in \Gamma'$). Wegens $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ is Δ bij deze voorstelling invariante deelruimte, dus induceert de voorstelling er een in $\Gamma' \bmod \Delta$. Stel dat Δ echt in Γ' bevat was. Dan was $\Gamma' \bmod \Delta$ van positieve dimensie, dus had de voorstelling een eigenvector $X_0 \neq 0 \bmod \Delta$, dus

$$[A, X_0] = \lambda_A X_0 \bmod \Delta \text{ voor } A \in \Delta.$$

Wegens rang = 0 was $\lambda_A = 0$, dus

$$[\Delta, X_0] \subset \Delta,$$

en de lineaire combinaties uit X_0 en Δ zouden een algebra Δ_1 vormen met commutatoralgebra $\subset \Delta$, dus Δ_1 ook oplosbaar in strijd met de maximaliteit van Δ . Dus is $\Delta = \Gamma'$, dus Γ' oplosbaar, dus ook Γ oplosbaar.

26. We beschouwen nu speciale complexe Lie-algebra's. Aangezien voorlopig de groepen geen expliciete rol spelen, zullen we kleine letters ook voor de elementen der Lie-algebra's gebruiken.

$\alpha_1 (1 \leq 1)$: Lie-algebra der groep der lin.afb. van de R_n met $n=1+1$ op zichzelf met determinant = 1. Bestaat uit de lin. afb. met spoor 0.

$\mathcal{L}_1 (1 \leq 1)$: Lie-algebra der groep der lin. afb. van de R_n met $n=2l+1$ op zichzelf, die een niet-ontaarde kwadratische vorm S invariant laten (orthogonale afb.: indien deze vorm de één-vorm is). Bestaat uit de lin.afb. A met $AS+SA'=0$. ($S=S'$).

$\mathcal{L}_1 (1 \leq 1)$: Lie-algebra der groep der symplectische afb. van de R_n met $n=2l$ op zichzelf, gedefinieerd doordat ze een niet-ontaarde antisymmetrische bilineairvorm met matrix S invariant laten ($S=-S'$). Bestaat uit de lin.afb. A met $AS+SA'=0$.

$\mathcal{V}_1 (1 \leq 2)$: Als $\mathcal{L}_1$, maar met $n=2l$.

$$\dim \alpha_1 = (1+1)^2 - 1$$

$$\dim \mathcal{L}_1 = 1(2l+1) = \dim \mathcal{L}_1$$

$$\dim \mathcal{V}_1 = 1(2l-1).$$

27. α_1 : We beschouwen de maximaal abelse subalgebra θ der diagonaalmatrices h met diagonaal-elementen $\omega_1, \dots, \omega_n$ (waarbij $\sum \omega_i = 0$) en verder de elementen e_{ij} ($i \neq j$), die in hun matrix overal nullen hebben, behalve op de ij -plaats, waar een 1 staat. Dan is

$$[h, e_{ij}] = (\omega_i - \omega_j) e_{ij}$$

$$[e_{ij}, e_{pq}] = 0 \text{ voor } i \neq q, j \neq p,$$

$$[e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik} \text{ voor } i \neq k,$$

$$[e_{ij}, e_{ki}] = -e_{kj} \text{ voor } j \neq k,$$

$$[e_{ij}, e_{ji}] = h_{ij} \in \theta \text{ (met 1 op plaats } i \text{ en } -1 \text{ op plaats } j, \text{ anders } 0),$$

θ abels.

Uit de e_{ij} samen met een basis van θ krijgt men een basis voor heel Γ .

De zojuist aangegeven commutator-relaties beschrijven de structuur van Γ volledig.

Θ wordt een stam van Γ genoemd (ook: Cartan ondergroep).

$$\begin{aligned}\tilde{h} e_{ij} &= (\omega_i - \omega_j) e_{ij} \\ \tilde{h} h_0 &= 0 \quad (h_0 \in \Theta)\end{aligned}$$

voor $h \in \Theta$ toont aan, dat de

$$e_{ij} \text{ en de elementen } \neq 0 \text{ van } \Theta$$

de simultane eigenvectoren van $\tilde{\Theta}$ zijn, resp. horende bij de eigenwaarden

$$\omega_i - \omega_j \text{ en } 0.$$

Deze eigenwaarden als functies op Θ beschouwd heten de wortelvormen (t.a.v. Θ) -- niet te verwarren met de wortels, die op heel Γ waren gedefinieerd en waarvan zij de beperking tot Θ zijn. De wortelvormen zijn lineaire functies op Θ . De niet verdwijnende vormen een eindige verzameling W . De wortelvorm 0 heeft de multipliciteit 1. Er zijn 1 lineair onafhankelijke onder de wortelvormen, b.v.

$$\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{n-1} - \omega_n.$$

Iedere wortelvorm is een lin. combinatie van deze met alle coëfficiënten geheel ≥ 0 of alle coëfficiënten geheel ≤ 0 .

Het aantal onafhankelijke wortels is minstens zo groot als het aantal onafhankelijke wortelvormen. De multipliciteit van de wortel 0 is hoogstens zo groot als van de wortelvorm 0. Dus is de rang = 1.

Met elke wortelvorm komt ook de tegengestelde voor. De (op scalaire factoren na bepaalde) eigenvectoren e_{ij} van $\tilde{\Theta}$ heten de takken (t.a.v. Θ), resp. horende bij de wortelvormen $\omega_i - \omega_j$.

h_{ij} heet de bijbehorende knoop.

Voor $h \in \Theta$ is $\text{sp } \tilde{h} = 0$,

$$\text{sp } \tilde{h}^2 = 2 \sum_{i < j} (\omega_i - \omega_j)^2.$$

Zonder meer ziet men, dat

$$\text{sp } \tilde{h} \tilde{e}_{ij} = 0$$

$$\text{sp } \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{pq} = 0, \text{ behalve}$$

$$\text{sp } \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ji} = 2(1+1),$$

hetgeen meer rekenwerk vereist:

$$\tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ji} h = (\omega_i - \omega_j) h_{ij}$$

levert tot het spoor een bijdrage $\omega_i - \omega_j = 2$ indien $h = h_{ij}$,

$$\tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ji} e_{pq}$$

levert voor $p=i, q \neq j$ een bijdrage 1, evenzo voor $p \neq i, q=j$, en voor $p=i, q=j$ een bijdrage 2, samen $2(n-1)$.

Hieruit blijkt, dat de kwadratische vorm ψ niet ontaard is.

28. $\mathcal{V}_1$: Men kiest als invariante kwadratische vorm het meest doelmatig de vorm $\xi_1 \xi_{n+1} + \xi_2 \xi_{n+2} + \dots + \xi_n \xi_{2n}$, dus met de matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Met

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

en

$$AS + SA' = 0$$

hebben we $A_2 + A_2' = A_3 + A_3' = A_1 + A_4' = 0$.

Voor θ kiezen we weer de subalgebra der diagonaal-matrices. Een $h \in \theta$ heeft achtereenvolgens de coëfficiënten $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n$. We hebben volgende soorten takken e_{ij} :

$$\begin{array}{ll} 1 \leq i, j \leq n, & 1 \text{ op plaats } ij, -1 \text{ op plaats } j+n, i+n \\ 1 \leq i < j-n \leq n, & 1 \text{ " " } ij, -1 \text{ " " } j-n, i+n \\ 1 \leq j < i-n \leq n, & 1 \text{ " " } ij, -1 \text{ " " } j+n, i-n. \end{array}$$

Hierbij horen resp. als wortelvormen

$$\begin{array}{l} \omega_i - \omega_j, \\ \omega_i + \omega_j, \\ -\omega_i - \omega_j. \end{array}$$

Algemeen $\pm \omega_i \pm \omega_j$ ($i \neq j$) alsmede de 1-voudige wortelvorm 0.

Als basis der wortelvormen kunnen dienen

$$\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{n-1} - \omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n.$$

Dus weer 1, waaruit alle te combineren zijn met gehele coëfficiënten, alle ≥ 0 of alle ≤ 0 . Met elke wortelvorm komt een tegengestelde voor. De rang is ook weer 1. De commutator-relaties zijn hier iets moeilijker op te schrijven. We kunnen ons echter van het

volgende --algemene-- principe bedienen: Horen e, e' resp. bij de wortelvormen α, α' , dan hoort $[e, e']$ bij de wortelvorm $\alpha + \alpha'$, als die er is, of $[e, e'] = 0$. Immers uit

$$[h, e] = \alpha(h)e \quad [h, e'] = \alpha'(h)e'$$

volgt wegens Jacobi

$$[h, [e, e']] = [[h, e] e'] + [e, [h, e']] = (\alpha + \alpha')(h) [e, e'].$$

In het onderhavige geval ziet men gemakkelijk, dat voor twee takken e, e' , horende bij wortelvormen α, α' met $\alpha + \alpha' \neq 0$,

$$[e, e'] = \pm e''$$

geldt, waar e'' weer een tak is. e_{ij} en e_{ji} horen bij tegengestelde wortelvormen, dus

$$[e_{ij}, e_{ji}] = h_{ij} \in \theta$$

en wel heeft h_{ij} op de plaatsen i en $j+n$ een 1 en op de plaatsen $i+n, j$ een -1. De h_{ij} heet weer de bijbehorende knoop.

$$\text{sp } \tilde{h}^2 = 4(1-1) \sum \omega_i^2$$

is weer niet ontaard. Dat ook ψ niet ontaard is, ziet men met ietwat meer rekenwerk.

29. $\mathcal{L}_1$: Men kiest als invariante kwadratische vorm $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ met de matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dus als bij $\mathcal{V}_1$, maar nog voorzien van een linker- en een bovenrand van de breedte 1. Dan blijken de elementen van $\mathcal{L}_1$ van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_2' & -a_1' \\ a_1 & A_1 & A_2 \\ a_2 & A_3 & -A_1' \end{pmatrix} \quad \text{met } A_2 + A_2' = A_3 + A_3' = 0$$

te zijn, waar het accent weer een spiegeling aanduidt. Voor θ kiezen we weer de subalgebra der diagonaalmatrices; een $h \in \theta$ heeft de diagonaalcoëfficiënten $0, \omega_1, \dots, \omega_n, -\omega_1, \dots, -\omega_n$. Bij de takken van $\mathcal{V}_1$ komen nu nog takken

$e_{oi} \ (1 \leq i \leq n)$ met 1 op plaats oi , -1 op plaats $i+n$, 0,

$e_{io} \ (1 \leq i \leq n)$ met 1 op plaats io , -1 op plaats 0, $i+n$.

Ze horen resp. bij de wortelvormen ω_i en $-\omega_i$, zodat

$$\pm \omega_i, \pm \omega_i \pm \omega_j \quad (i \neq j)$$

samen met de 1-voudige 0 alle wortelvormen zijn. Als basis kiezen we

$$\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{n-1} - \omega_n, \omega_n.$$

Dus weer 1, waaruit alle als vroeger zijn te combineren. Rang weer 1. Het overige analoog als vroeger.

30. $\mathcal{L}_1^2$: Men kiest de invariante antisymmetrische bilineairvorm met matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Met

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

en

$$AS + SA' = 0$$

hebben we

$$A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_1 + A_4' = 0.$$

0 als vroeger. De takken en wortelvormen analoog aan die van $\mathcal{V}_1$, maar er komen bij

$e_{i,i+n}$ met 1 op plaats $i, i+n$,

$e_{i+n,i}$ met 1 op plaats $i+n, i$,

horende bij wortelvormen $2\omega_i$ resp. $-2\omega_i$. Dus alle wortelvormen zijn: $\pm 2\omega_i, \pm \omega_i \pm \omega_j \ (i \neq j)$ en 1-keer 0. Dus is:

$$\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{n-1} - \omega_n, 2\omega_n.$$

Al het overige analoog.

31. Wat wij hier bij $\alpha_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1', \mathcal{V}_1$ hebben opgemerkt, is typisch voor de halfcirkelvormige Lie-algebras, waarop we straks zullen terugkomen. Inmiddels zij Γ nog een willekeurige Lie-algebra.

In Γ kiezen we een h_0 , dat het maximaal aantal verschillende wortels bezit. Bij een wortel α beschouwen we niet alleen de eigen-

vectoren $x \in \Gamma$ (dus $(\tilde{h}_0 - \alpha)x \neq 0$), maar alle oplossingen x van

$$(\tilde{h}_0 - \alpha)^i x = 0 \quad \text{met willekeurige natuurlijke } i.$$

Deze vormen een lineaire deelruimte Γ_α van Γ . We bewijzen:

$$\underline{[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] \subset \Gamma_{\alpha+\beta}},$$

waarbij met $\Gamma_{\alpha+\beta}$ is bedoeld (0) , indien $\alpha+\beta$ niet wortel is;

$$(\tilde{h}_0 - \alpha)^i x = (\tilde{h}_0 - \beta)^j y = 0,$$

$$(\tilde{h}_0 - \alpha - \beta)[x, y] = [(\tilde{h}_0 - \alpha)x, y] + [x, (\tilde{h}_0 - \beta)y].$$

Herhaalde toepassing levert op

$$(\tilde{h}_0 - \alpha - \beta)^{i+j+1} [x, y] = \text{een som van } [(\tilde{h}_0 - \alpha)^p x, (\tilde{h}_0 - \beta)^q y] \text{ met}$$

$p+q=i+j$, dus of $p \geq i$, of $q \geq j$. Dus verdwijnen alle summanden.

Speciaal is $[\Gamma_0, \Gamma_0] \subset \Gamma_0$, dus is Γ_0 subalgebra. Zij nu $h \in \Gamma_0$ zo dicht bij h_0 , dat geen bij h_0 verschillende wortels bij h samenvallen. Γ_α is invariant bij $\tilde{h}$ want $[\Gamma_0, \Gamma_\alpha] \subset \Gamma_\alpha$. In Γ_α heeft $\tilde{h}$ slechts één eigenwaarde, want anders zou het er meer hebben dan $\tilde{h}_0$. We noemen hem $\alpha(h)$, terwijl we die van $\tilde{h}_0$ nu $\alpha(h_0)$ gaan noemen. $\alpha(h)$ is in een omgeving van h_0 gedefinieerd.

In Γ_0 heeft $\tilde{h}$ zeker de eigenwaarde 0 want $\tilde{h}h = 0$ en $h \in \Gamma_0$, en ook geen andere eigenwaarde. Dus is voor $i = \dim \Gamma_0$: $\tilde{h}^i x = 0$ als $x \in \Gamma_0$. Nu is $\tilde{h}^i x$ regulier analytisch in h voor alle $h \in \Gamma_0$, en 0 in een omgeving van h_0 . Dus

$$\tilde{h}^i x = 0 \quad \text{voor } h \in \Gamma_0, x \in \Gamma_0, i = \dim \Gamma_0.$$

Dus verdwijnen alle wortels op Γ_0 , dus ook op zijn commutatoralgebra, dus (volgens 25)

$$\underline{\Gamma_0 \text{ oplosbaar}}.$$

We beschouwen de $\tilde{h}$ met $\tilde{h} \in \Gamma_0$ nu alleen op Γ_α . Volgens 17 (stelling van Lie) bezitten ze een simultane eigenvector $x \neq 0$, $x \in \Gamma_\alpha$

$$(\tilde{h} - \lambda(h))x = 0, h \in \Gamma_0.$$

Voor h in een nabijheid van h_0 op Γ_0 geldt $\lambda(h) = \alpha(h)$, omdat deze h maar één wortel bezitten. $\tilde{h}x$ is lineair in h , dus is ook $\lambda(h)x$ lineair in h , dus ook $\lambda(h)$. We beschouwen nu α als in heel Γ_0 gedefinieerd, en wel als identiek met λ . In een nabijheid van h_0 op Γ_0

(waar $\alpha(h)$ de enige wortel van h is) geldt

$$(\tilde{h} - \alpha(h))^{\dim \Gamma_\alpha} y = 0.$$

Het linkerlid is rationaal in h (wegens de lineariteit van α).
Dus verdwijnt het zelfs identiek voor $h \in \Gamma_0$.

We vatten dit samen:

Algemene structuurstelling: Met betrekking tot een "algemeen" element h_0 valt Γ uiteen in lineaire deelruimten Γ_α zodat

Γ_0 = verzameling der $x \in \Gamma$ met $\tilde{h}_0^i x = 0$ voor geschikte i = "stam"
een oplosbare subalgebra is,

elke α een lineaire functie op Γ_0 is (een "wortelvorm")

$$(\tilde{h} - \alpha(h))^{\dim \Gamma_\alpha} \Gamma_\alpha = 0 \text{ voor } h \in \Gamma_0 \text{ is,}$$

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] \subset \Gamma_{\alpha+\beta} (=0) \text{ indien } \alpha+\beta \text{ niet wortelvorm is}.$$

Ten aanzien van een ander "algemeen" element uit Γ_0 is de splitting dezelfde.

32. Zij α een wortelvorm $\neq 0$, μ een wortelvorm, $f_+ \in \Gamma_\alpha$, $f_- \in \Gamma_{-\alpha}$.
Dan is

$$\tilde{f}_+ \Gamma_\mu \subset \Gamma_{\mu+\alpha}, \quad \tilde{f}_- \Gamma_\mu \subset \Gamma_{\mu-\alpha}.$$

Stel

$$\Delta = \sum_j \text{geheel } \Gamma_{\mu+j\alpha}.$$

Dan is Δ invariant bij $\tilde{f}_+$ en $\tilde{f}_-$ dus ook bij $\tilde{h}$ met

$$h = [f_+, f_-].$$

Als commutator heeft $\tilde{h}$ in Δ het spoor 0. $\text{sp}(\tilde{h})$ is de som van de eigenwaarden $(\mu+j\alpha)(h)$ van $\tilde{h}$ in Δ , elk resp. met de multipliciteit $\dim \Gamma_{\mu+j\alpha}$, dus

$$\sum_j \dim \Gamma_{\mu+j\alpha} \cdot (\mu+j\alpha)(h) = 0.$$

We noemen elk element van $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha]$ een α -knoop. Dan geldt dus:

Algemene structuurstelling, vervolg: Is h een α -knoop, dan is voor elke wortelvorm

$$\mu(h) \text{ rationaal veelvoud van } \alpha(h);$$

de factor hangt alleen van α af (niet van f_+, f_- , dus ook niet van h).

33. Zij Δ subalgebra van Γ . We kunnen de bilineairvorm ψ ook voor Δ bekijken en onderscheiden tussen

$$\psi_{\Delta}(x,y) = \text{sp}_{\Delta} \tilde{x} \tilde{y} \quad (x,y \in \Delta)$$

en

$$\psi_{\Gamma}(x,y) = \text{sp}_{\Gamma} \tilde{x} \tilde{y} \quad (x,y \in \Delta),$$

waarbij het spoor eenmaal voor Δ en het andermaal voor Γ wordt genomen. Is echter Δ ideaal in Γ , dan is

$$\psi_{\Delta}(x,y) = \psi_{\Gamma}(x,y) \quad (x,y \in \Delta),$$

want

$$\tilde{x} \tilde{y} z \in \Delta \text{ voor } x,y \in \Delta, z \notin \Delta.$$

34. Is Γ oplosbaar, dan verdwijnen volgens 25 in de commutator-algebra $C(\Gamma)$ alle wortels. Dus ook $\psi(x,x)$ als kwadraatsom van de wortels. Hiervan geldt ook het omgekeerde.

Tweede criterium voor oplosbaarheid: Dan en slechts dan is oplosbaar, als $\psi(x,x)=0$ voor alle $x \in C(\Gamma)$.

We hoeven alleen nog "dan" te bewijzen. Zij $\Delta \neq (0)$ (i.p.v. Γ) een Lie-algebra met $C(\Delta)=\Delta$. Dan is Δ zeker niet oplosbaar. Volgens 25 is er dus een $h_0 \in \Delta$, waarvan niet alle wortels verdwijnen. We kiezen h_0 als "algemeen" element (zie 31). Wegens $C(\Delta)=\Delta$ moet in 't bijzonder elk element van de stam Δ_0 lineaire combinatie van commutatoren, dus van knopen zijn. Dus is er zelfs een knoop $h_{\alpha} \in \Delta_{\alpha}$ waar niet alle wortelvormen $\mu(h_{\alpha})$ verdwijnen. Volgens 32 is dan $\alpha(h_{\alpha}) \neq 0$. Nu is $\psi(h_{\alpha}, h_{\alpha}) = \sum_{\mu} \mu(h_{\alpha})^2$ (weer volgens 32) $= \rho \sum \alpha(h_{\alpha})^2$ met $\rho \neq 0$. Dus $\psi(h_{\alpha}, h_{\alpha}) \neq 0$. Dus verdwijnt ψ niet identiek in Δ .

Zij $\psi(x,x)=0$ voor alle $x \in C(\Gamma)$, maar Γ niet oplosbaar. Γ bezit dus een ideaal Δ met $C(\Delta)=\Delta$ (namelijk de laatste term in de commutatorrij). Volgens het voorafgaande is dan ψ_{Δ} niet identiek 0 op Δ , dus volgens 33 ook ψ_{Γ} niet identiek 0 op Δ , dus ook op $C(\Gamma)$, in strijd met de veronderstelling. Hiermee is het beweerde bewezen.

35. Zijn Δ_1, Δ_2 oplosbare idealen in Γ , dan is ook $\Delta_1 + \Delta_2$ oplosbaar ideaal. Er is dus één maximaal oplosbaar ideaal, de radicaal van Γ .

Γ heet halfenkelvoudig, als Γ geen niet-triviale oplosbare idealen bezit, anders gezegd: als zijn radicaal (0) is.

Nog anders: Γ heet halfenkelvoudig, als Γ geen niet triviaal abels ideaal bezit. Want met Δ is ook $C(\Delta)$ ideaal van Γ (reken na;

gebruik "Jacobi"), dus ook $C(C(\Delta))$ enz., dus ook (als Δ oplosbaar is) de laatste op (0) na in de commutatorrij.

Een enkelvoudige algebra is halfenkelvoudig dan en slechts dan, als zij niet abels is (dus als de dimensie > 1) is.

Voor willekeurige Γ is net de restklassenalgebra Γ mod radiaal halfenkelvoudig.

De halfenkelvoudigheid kan ook voor de Lie-groepen worden gedefinieerd. G is halfenkelvoudig als G geen oplosbare Lie-normaal-deler van positieve dimensie bezit. (Zo'n G kan dus wel discrete oplosbare normaaldelers bezitten.) Bij halfenkelvoudige G is de Γ halfenkelvoudig, en omgekeerd.

36. De verzameling Δ van alle $x \in \Gamma$ met $\psi(x, y) = 0$ identiek in y is lin. deelruimte van Γ . Volgens de $\tilde{\Gamma}$ -invariantie van ψ is ook Δ invariant bij $\tilde{\Gamma}$, dus Δ ideaal in Γ . Wegens $\psi_{\Gamma}(x, x) = \psi_{\Delta}(x, x)$ voor $x \in \Delta$ (zie 33) verdwijnt ψ_{Δ} identiek op Δ . Dus is Δ oplosbaar volgens 34. Voor halfenkelvoudige Γ geldt dus: $\psi(x, y) = 0$ identiek in y dan en slechts dan als $x = 0$. Dus ψ niet ontaard.

Is omgekeerd ψ niet ontaard, dan moet Γ halfenkelvoudig zijn. Want is Δ niet triviaal abels ideaal van Γ , dan is

$$\tilde{x} \tilde{y} z = [x, [y, z]] \in \Delta \quad \text{voor alle } x, z \in \Gamma, y \in \Delta,$$

en dan leveren tot $\text{sp } \tilde{x} \tilde{y}$ alleen de $z \in \Delta$ een bijdrage, die echter wegens de commutativiteit van Δ verdwijnt. Dus $\psi(x, y) = \text{sp } \tilde{x} \tilde{y} = 0$ voor $x \in \Gamma, y \in \Delta$ en dus ψ ontaard.

We hebben dus:

Eerste criterium voor halfenkelvoudigheid: Γ is halfenkelvoudig, dan en slechts dan als ψ niet ontaard is.

37. Zij Δ ideaal van Γ . Dan is Δ invariant bij $\tilde{\Gamma}$, dus is bij $\tilde{\Gamma}$ ook invariant de verzameling Δ_1 van alle x met $\psi(x, y) = 0$ voor alle $y \in \Delta$. Dus is ook Δ_1 ideaal in Γ . Bekende eigenschappen van lineaire vergelijkingssystemen leveren op: $\dim \Delta + \dim \Delta_1 \geq \dim \Gamma$. Op $\Delta \cap \Delta_1$ verdwijnt ψ , dus is $\Delta \cap \Delta_1$ oplosbaar ideaal in Γ . Voor halfenkelvoudige Γ is dus $\Delta \cap \Delta_1 = (0)$, dus $\Gamma =$ directe som van Δ en Δ_1 . Door dit herhaaldelijk toe te passen, krijgt men:

Tweede criterium voor halfenkelvoudigheid: Γ is halfenkelvoudig dan en slechts dan, als het directe som van enkelvoudige Lie-algebra's is, waaronder geen abelse (dus geen van een dimensie 1).

Veronderstelt men hierboven Δ halfenkelvoudig (i.p.v. Γ), dan geldt nog steeds $\Delta \cap \Delta_1 = 0$, dus Γ directe som van Δ en Δ_1 . Dus:

Een halfenkelvoudige algebra kan ideaal van een andere alleen op triviale wijze zijn, d.w.z. als directe summand.

Het analoge van het tweede criterium geldt voor halfenkelvoudige Liegroepen, met dien verstande, dat aan de directe som een direct product in het klein beantwoordt.

Verder blijkt uit de laatste stelling, dat de automorfismengroep van een halfenkelvoudige groep in de buurt van de 1 met de geadjungeerde groep samenvalt.

38. We veronderstellen Γ halfenkelvoudig en exploiteren het tweede criterium met behulp van de algemene structuurstelling.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \text{sp } \tilde{x} \tilde{y} \text{ kan } \neq 0 \text{ zijn} \\ \text{voor } x \in \Gamma_0 &\text{ alleen als ook } y \in \Gamma_0 \text{ is, en} \\ \text{voor } x \in \Gamma_\alpha &\text{ alleen als } y \in \Gamma_{-\alpha} \text{ is.} \end{aligned}$$

Daar ψ niet ontaard is, is er dus

$$\begin{aligned} \text{bij elke } h \in \Gamma_0, h \neq 0 &\text{ een } h_1 \in \Gamma_0 \text{ met } \psi(h, h_1) \neq 0, \\ \text{bij elke } f_+ \in \Gamma_\alpha, f_+ \neq 0, &\text{ een } f_- \in \Gamma_{-\alpha} \text{ met } \psi(f_+, f_-) \neq 0. \end{aligned}$$

Nu is voor $h, h_1 \in \Gamma_0$

$$\psi(h, h_1) = \sum_{\mu} \dim \Gamma_{\mu} \cdot \mu(h) \mu(h_1),$$

Dus:

Heeft $h \in \Gamma_0$ al zijn wortels 0, dan is $h=0$.

Is h een lineaire combinatie van α -knopen, dan is volgens 32 voor het verdwijnen van alle wortels $\mu(h)$ voldoende het verdwijnen van $\alpha(h)$. Dus:

Is h lineaire combinatie van α -knopen en $\alpha(h)=0$, dan is $h=0$.

Was de dimensie van de door de α -knopen voortgebrachte lineaire ruimte >1 , dan had de lineaire functie α daar een niet triviale nulruimte, in strijd met het zojuist onderstreepte, dus

$$\underline{\dim [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\alpha}] \leq 1.}$$

Een $h \in C(\Gamma_0)$ heeft uitsluitend verdwijnende wortels, dus $C(\Gamma_0) \neq 0$, dus Γ_0 is abels.

Daar de doorsnee van de nulruimten van alle wortelvormen de 0 is, geldt

$$\dim \Gamma_0 \leq \text{aantal lin.onafhankelijke wortelvormen.}$$

Verder is (zie 24)

$\dim \Gamma_0$ = aantal identiek verdwijnende wortelvormen
 $\geq$ rang = aantal algebr.onafh. wortels
 $\geq$ aantal algebr. onafh. wortelvormen

Dus: $\dim \Gamma_0 =$ aantal lin.onafh. wortelvormen

We beschouwen nu de $f_+ \in \Gamma_\alpha$, $f_- \in \Gamma_{-\alpha}$ met $\psi(f_+, f_-) \neq 0$ van daar-
 net. Was $[f_+, f_-] = 0$, dan was er een simultane driehoeksgedaante
 voor f_+, f_- (zie 18). Wegens $\tilde{f}_+ \in \Gamma_{\mu} \subset \Gamma_{\mu+\alpha}$ heeft f_+ uitsluitend ver-
 dwijnende wortels, evenzo f_- , dus $\text{sp}(\tilde{f}_+, \tilde{f}_-) = 0$. Dus $[f_+, f_-] \neq 0$ dus
 $\dim [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] > 0$. Dus

$$\dim [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = 1 \text{ voor } \alpha \neq 0.$$

Oftewel: De α -knoop is op een scalaire factor na uniek.

39. Kies $f_+ \in \Gamma_\alpha$ als simultane eigenvector van $\tilde{\Gamma}_0$, dus

$$[h, f_+] = \alpha(h)f_+ \text{ voor } h \in \Gamma_0.$$

Kies $f_- \in \Gamma_{-\alpha}$ zo dat $\psi(f_+, f_-) \neq 0$ dus (zie het laatste bewijs)

$$[f_+, f_-] = h_\alpha \neq 0.$$

Kies verder een wortelvorm $\mu \neq 0$ en $x \in \Gamma_\mu$, $x \neq 0$ zodat

$$\tilde{f}_- x = 0.$$

(Dit zal zeker zo zijn, als $\mu - \alpha$ geen wortelvorm is.)

Stel

$$x_j = \tilde{f}_+^j x$$

voor gehele $j \geq 0$. Dan is

$$x_j \in \Gamma_{\mu+j\alpha}.$$

$$\tilde{h}_\alpha x_j = (\mu + j\alpha)(h_\alpha)x_j$$

blijkt door inductie:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_\alpha x_{j+1} &= \tilde{h}_\alpha \tilde{f}_+ x_j = \tilde{f}_+ \tilde{h}_\alpha x_j + [\tilde{h}_\alpha, \tilde{f}_+] x_j \\
 &= (\mu + j\alpha)(h_\alpha)x_{j+1} + \alpha(h_\alpha)x_{j+1}.
 \end{aligned}$$

Ook door inductie bewijzen we

$$\tilde{f}_- x_{j+1} = f_j x_j$$

met zekere scalairen ρ_j :

$$\tilde{f}_- x_{j+1} = \tilde{f}_- \tilde{f}_+ x_j = \tilde{f}_+ \tilde{f}_- x_j - \tilde{h}_\alpha x_j = (\rho_{j-1} - (\mu + j\alpha)(h_\alpha)) x_j.$$

Dus

$$\rho_j = \rho_{j-1} - (\mu + j\alpha)(h_\alpha).$$

Optellen van deze vergelijkingen over $j=0, \dots, i$ (waarbij $\rho_{-1}=0$ wegens $f_- x=0$) levert:

$$\rho_i = - \sum_{j=0}^i (\mu + j\alpha)(h_\alpha).$$

Er is een p zodat

$$x_p \neq 0, \quad x_{p+1} = 0.$$

Die maakt $\rho_p=0$. Dus

$$\sum_{j=0}^p (\mu + j\alpha)(h_\alpha) = 0,$$

dus

$$(p+1)\mu(h_\alpha) + \frac{p(p+1)}{2} \alpha(h_\alpha) = 0,$$

$$p = -2 \frac{\mu(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$$

is de lengte van de "ladder" der x_j (tussenruimten geteld, niet sporten). (We zien opnieuw, dat $\mu(h_\alpha)$ rationaal veelvoud van $\alpha(h_\alpha)$ is.) Van de ladder van wortelvormen is het middelpunt

$$\mu - \frac{\mu(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} = \lambda - \frac{\lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} \alpha,$$

indien

$$\lambda = \mu + \xi \alpha$$

is gesteld met willekeurige ξ . Van alle α -ladders, die op de "rechte" $\mu + \xi \alpha$ (ξ variabel) liggen, is dus het middelpunt hetzelfde.

40. We bewijzen nu: $\dim \Gamma_\alpha = 1$ voor $\alpha \neq 0$. Hiervoor kiezen we weer f_+, f_-, h_α als in 39. Stel $\dim \Gamma_\alpha > 1$. Dan is er een $y \in \Gamma_\alpha$ onafhankelijk van f_+ met

$$\tilde{h}_\alpha y = \alpha(h_\alpha) y \text{ mod } f_+.$$

We kunnen

$$x = y_+ \sigma f_+$$

zo bepalen dat

$$\tilde{f}_- x = 0$$

is, te weten door $f_- y = \sigma h_\alpha$ te maken, maar dit kan, omdat $f_- y$ knoop, dus op een factor σ na veelvoud van h_α is (zie 38 einde; merk op, dat $h_\alpha \neq 0$).

We stellen weer

$$x_j = f_+^j x$$

en redeneren als in 39, met $\mu = \alpha$. We kunnen het resultaat van 39 echter niet rechtstreeks toepassen, omdat nu slechts

$$\tilde{h}_\alpha x_0 = \alpha(h_\alpha) x_0 \bmod f_+$$

bekend is. Wel geldt weer

$$\tilde{h}_\alpha x_j = (j+1)\alpha(h_\alpha) x_j \quad \text{voor } j > 0$$

omdat

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\alpha x_{j+1} = \tilde{h}_\alpha \tilde{f}_+ x_j = \tilde{f}_+ \tilde{h}_\alpha x_j + [\tilde{h}_\alpha, \tilde{f}_+] x_j = (j+1)\alpha(h_\alpha) x_{j+1} + \\ + \alpha(h_\alpha) x_{j+1} \end{aligned}$$

is. Ook geldt bij inductie voor $j \geq 1$

$$\tilde{f}_- x_{j+1} = -\binom{j+2}{2} \alpha(h_\alpha) x_j,$$

omdat $\tilde{f}_- x_{j+1} = \tilde{f}_- \tilde{f}_+ x_j = \tilde{f}_+ \tilde{f}_- x_j - \tilde{h}_\alpha x_j = -\binom{j+1}{2} \alpha(h_\alpha) x_j - (j+1)\alpha(h_\alpha) x_j,$

en $\tilde{f}_- x_1 = \tilde{f}_- \tilde{f}_+ x_0 = \tilde{f}_+ \tilde{f}_- x_0 - \tilde{h}_\alpha x_0 = -\alpha(h_\alpha) x_0 \bmod f_+.$

Met p als vroeger heeft men

$$\binom{p+2}{2} \alpha(h_\alpha) = 0$$

dus wegens $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ een strijdigheid.

Dus $\dim \Gamma_\alpha = 1$ voor $\alpha \neq 0$.

41. Gegeven de wortelvormen $\alpha \neq 0$ en λ . Zij m geheel en maximaal zo dat $\mu = \lambda - m\alpha$ nog wortelvorm is. Voor $x \in \Gamma_\mu$ geldt dan $\tilde{f}_+ x = 0$. Zij weer $x_j = \tilde{f}_+^j x$, $x_p \neq 0$, $x_{p+1} = 0$. Stel er eens nog een wortelvorm $\mu + p'\alpha$ met gehele $p' > p$ dan kiezen we de p' weer geheel maximaal, nemen $y \in \Gamma_{\mu+p'}$ en definiëren $y_j = \tilde{f}_+^j y$. De middelpunten van de α -ladder en $(-\alpha)$ -ladder vallen samen, zodat ook $\mu - q'\alpha$ wortelvorm zou zijn

met $p'+q' = p+q$, in strijd met de definitie van p . Dus behoren alle $\lambda + j\alpha$ (j geheel) tot een aaneengesloten ladder van wortelvormen. Met λ is ook zijn gespiegelde t.a.v. het middelpunt wortelvorm. Dus:

Met $\alpha \neq 0$ en λ zijn ook alle

$$\lambda + j\alpha \quad \text{met } j \leq -2 \frac{\lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} \quad (j \text{ natuurlijk})$$

wortelvormen.

(Op de rechte $\lambda + \xi\alpha$ (ξ reëel variabel) zouden op zichzelf twee ladders van wortelvormen kunnen liggen, één met even lengte, die het middelpunt σ bevat, en één met oneven lengte, die niet σ , maar wel $\sigma + \frac{1}{2}\alpha$ bevat; later zal blijken, dat dit feitelijk niet voorkomt.)

Laat β en γ onderling afhankelijke wortelvormen $\neq 0$ zijn. Daar $-2 \frac{\gamma(h_\beta)}{\beta(h_\beta)}$ als ladderlengte geheel is, moet de verhouding van β en γ rationaal zijn. We kiezen de van β afhankelijke wortelvorm $\alpha \neq 0$ zodat $\tau\alpha$ voor $0 < \tau < 1$ niet wortelvorm is, verder ξ maximaal zodat $-\xi\alpha$ wortelvorm is. $x \in \Gamma_{-\xi\alpha}$ brengt een ladder ter lengte 2ξ voort, met laatste sport $x_{2\xi}$ horende bij de wortelvorm $\xi\alpha$. Zij in de ladder van wortelvormen $i\alpha$ de eerste met $i > 0$. Gezien de keuze van α moet dan $i \geq 1$ zijn. Nu is $i > 1$ onmogelijk omdat dan ook $(i-1)\alpha$ wortelvorm zou zijn. Dus $i=1$. Bij α hoort als tak: $x_{(\xi+1)\alpha} = f_+$. Nu is $x_{(\xi+2)\alpha} = \tilde{f}_+ + x_{(\xi+1)\alpha} = 0$. Dus $2\xi = \xi+1$, $\xi=1$. Hieruit volgt dat de enige veelvouden van de wortelvorm α , die weer wortelvormen zijn, de vorm $\pm\alpha$ of 0 hebben.

42. Uit de formules van 39 kunnen we het spoor van $\tilde{f}_- \tilde{f}_+$ in de door de $x_0, \dots, x_p$ opgespannen lineaire ruimte berekenen. Dit is namelijk

$$\sum_0^p \rho_j.$$

Vermenigvuldigen we de recursieformule (zie 39)

$$\rho_j = \rho_{j-1} - (\mu + j\alpha)(h_\alpha)$$

met j en sommeren we over j , dan krijgen we juist

$$\sum_0^p \rho_j = \sum_{j=0}^p j(\mu + j\alpha)(h_\alpha).$$

Door middel van

$$p = -2 \frac{\mu(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$$

kunnen we $\mu(h_\alpha)$ elimineren:

$$\sum_0^p p_j = \sum_0^p j(j-\frac{1}{2}p) \alpha(h_\alpha).$$

Het spoor van $\tilde{f}_- \tilde{f}_+$ in de genoemde ruimte is dus

$$\frac{1}{12} p(p+1)(p+2) \alpha(h_\alpha),$$

en

$$\text{sp } \tilde{f}_- \tilde{f}_+ = \frac{1}{12} \sum p(p+1)(p+2) \alpha(h_\alpha),$$

waarbij de som loopt over alle α -ladders en p er telkens de lengte van is.

43. We noemen de stam Γ_0 in 't vervolg θ , een bij de wortelvorm α horende tak noemen we e_α , de knoop $[e_\alpha, e_{-\alpha}]$ noemen we h_α . Elementen van θ worden meestal met h aangeduid.

We vatten de resultaten samen:

Structuurstelling voor halfenkelvoudige Lie-algebras.

Γ zij halfenkelvoudig van de rang 1. Dan geldt:

De stam θ is abels.

$\dim \theta = 1$.

De wortelvorm 0 is 1-voudig.

Elke wortelvorm $\neq 0$ is enkelvoudig.

Onder de wortelvormen zijn er precies 1 lineair onafhankelijke.

Met elke wortelvorm is ook zijn tegengestelde wortelvorm.

Andere veelvouden treden niet als wortelvorm $\neq 0$ op.

Bij elke wortelvorm α behoort een op een scalair na bepaalde tak e_α , zodat

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad \text{voor } h \in \theta.$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \in \theta.$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, \text{ als } \alpha+\beta \text{ wortelvorm } \neq 0 \text{ is,} \\ = 0 \text{ anders.}$$

θ samen met de e_α brengt Γ lineair voort.

$\alpha(h_\alpha) \neq 0$.

Met $\alpha \neq 0$ en λ zijn ook alle $\lambda + j\alpha$ met natuurlijke $j \leq -2 \frac{\lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$ wortelvormen. $-2 \frac{\lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$ is geheel.

Is bovendien $\lambda - \alpha$ niet wortelvorm, dan liggen alle wortelvormen

$\lambda + j\alpha$ (j natuurlijk) in de α -ladders vanuit λ ter lengte $-2 \frac{\lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$.

ψ is op Γ en speciaal op Θ niet ontaard.

Voor $h, h' \in \Theta$ is $\psi(h, h') = \sum \mu(h) \mu(h')$, waar $\sum$ over alle wortelvormen loopt.

$\psi(h, e_\alpha) = 0$ voor $h \in \Theta$, $\psi(e_\alpha, e_\beta) = 0$ voor $\alpha + \beta \neq 0$,

$\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \frac{1}{12} \sum p(p+1)(p+2) \alpha(h_\alpha) = N_\alpha$, waarbij de som loopt over alle α -ladders en p telkens de ladderlengte betekent.

44. De theorie der halfenkelvoudige algebras, als tot hier toe ontwikkeld, komt uit E. Cartans Thèse (1894). Het gaat nu verder met methoden van H. Weyl (Math. Zeitschr. 23-24, 1925/26).

De wortelvormen zijn elementen van de met Θ duale ruimte Θ^* , d.w.z. de verzameling van de lineaire functies op Θ , opgevat als lineaire ruimte. De afbeelding

$$S_\alpha : \xi \longrightarrow \xi - 2 \frac{\xi(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} \alpha$$

waarbij aan een wortelvorm ξ zijn spiegelbeeld in de α -ladder wordt toegevoegd, is zinvol voor alle $\xi \in \Theta^*$. S_α is een lineaire afbeelding, $S_\alpha^2 = 1$; bij S_α blijft een (1-1)-dim.lin. deelruimte van Θ^* puntsgewijs invariant, te weten de verzameling van alle lin. functies op Θ , die voor h_α verdwijnen. S_α draait elke α -ladder ondersteboven. De wortelvormen $\neq 0$ worden door S_α onderling gepermuteerd. De S_α brengen een groep voort, de kaleidoskoopgroep (omdat de S_α zoets als spiegelingen zijn) of Weylgroep van Γ . Deze groep is eindig, namelijk in wezen een permutatiegroep van de wortelvormen (die heel Θ^* lineair voortbrengen).

45. Uit de invariantie van ψ t.a.v. de geadjungeerde groep ($e_{-\mu}$ toegepast op $\psi(h_\lambda, e_\mu)$) volgt

$$\psi([e_{-\mu}, h_\lambda], e_\mu) + \psi(h_\lambda, [e_{-\mu}, e_\mu]) = 0,$$

dus

$$\mu(h_\lambda) N_\mu = \psi(h_\lambda, h_\mu).$$

Alle e_α door geschikte veelvouden vervangende, kunnen we ervoor zorgen, dat alle

$$N_\alpha = \psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1 \quad (1)$$

worden. Dan is dus

$$\mu(h_\lambda) = \psi(h_\lambda, h_\mu). \quad (2)$$

De lineaire vorm in h (bij vaste μ)

$$\mu(h) = \psi(h, h_\mu)$$

verdwijnt voor alle knopen $h=h_\lambda$, dus (omdat de knopen θ lineair voortbrengen) identiek, dus

$$\mu(h) = \psi(h, h_\mu). \quad (3)$$

ψ bepaalt een kanonieke afbeelding ζ van θ in θ^* : $\zeta h'$ is dus element van θ^* , dat voor $h \in \theta$ de waarde $\psi(h, h')$ heeft (voor alle h), dus

$$(\zeta h')(h) = \psi(h, h') \text{ voor alle } h, h' \in \theta. \quad (4)$$

θ is lineair, en wegens het niet-ontaarden van ψ , ook één-één.

$$\zeta(h_\mu) = \mu \quad (5)$$

naar (3).

De bilineaire vorm ψ kan als inproduct in θ worden beschouwd. Zij induceert een inproduct in θ^* door

$$(\zeta h, \zeta h') = \psi(h, h') \text{ voor alle } h, h' \in \theta. \quad (6)$$

Dus luidt (2) nu

$$\mu(h_\lambda) = (\lambda, \mu). \quad (7)$$

$(\mu(h_\lambda))$ is nu symmetrisch in λ en μ .

Het inproduct in θ^* is ook niet-ontaard, d.w.z. geen element $\neq 0$ is op de hele ruimte loodrecht. (Maar wegens de complexiteit kan er van definitetheid van het inproduct geen sprake zijn.)

Naar de structuurstelling was

$$\psi(h_\lambda, h_\mu) = \sum \rho(h_\lambda) \rho(h_\mu) \quad (\sum \text{ loopt over alle wortelvormen } \rho).$$

Dit wordt nu

$$(\lambda, \mu) = \sum \rho(\lambda, \rho)(\mu, \rho) \quad (\sum \text{ loopt over alle w.v. } \rho) \quad (8)$$

De formule blijft gelden als λ en μ willekeurige elementen van θ^* zijn (lin.combinaties van wortelvormen).

De formule uit 42 voor S_α wordt nu

$$S_\alpha \zeta = \zeta - 2 \frac{(\zeta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad (9)$$

en dat is nu werkelijk een spiegeling in de zin van de metriek in θ^* , namelijk een orthogonale afbeelding. Immers

$$(S_\alpha \xi, \eta) = (\xi, \eta) - 2 \frac{(\xi, \alpha)(\eta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = (S_\alpha \eta, \xi),$$

dus $(S_\alpha \xi, S_\alpha \eta) = (S_\alpha^2 \eta, \xi) = (\xi, \eta).$

Door de normering $N_\alpha = 1$ zijn alle (α, α) (α = wortelvorm) positieve rationale getallen geworden (zie de formule voor N_α in de structuurstelling). Daar de $-2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ geheel zijn, zijn alle (α, β) rationaal (α, β wortelvormen).

Kiest men in θ^* een basis uit wortelvormen $\mu_1, \dots, \mu_l$, dan bezit elke wortelvorm μ een voorstelling

$$\mu = \sum r_i \mu_i.$$

Wegens $(\mu, \mu_j) = \sum r_i (\mu_i, \mu_j)$

kan men de r_i uit een lin.systeem met rationale coëfficiënten berekenen. Ze zijn dus rationaal.

Neemt men alleen de reële lin. combinaties van de wortelvormen, dan krijgt men een reële 1-dim.lin. ruimte, genaamd θ_u^* . Voor wortelvormen λ, μ was (λ, μ) rationaal, dus is het voor alle $\lambda, \mu \in \theta_u^*$ reëel. Uit (8) volgt

$$(\lambda, \lambda) = \sum \rho (\lambda, \rho)^2,$$

dus $(\lambda, \lambda) \geq 0$ voor $\lambda \in \theta_u^*$.

Het inproduct is in θ_u^* positief definitief.

Analoog wensen we θ_u als verzameling van de reële lin.combinaties van de h_λ (λ = wortelvorm). Dan is $\theta_u = \theta_u^*$; en ψ reëel, positief definitief in θ_u .

Samenvatting:

Structuurstelling voor halfenkelvoudige Lie-algebras, 1e ver-
volg.

Na de normering $N_\alpha = 1$ (voor alle wortelvormen $\alpha \neq 0$) en invoering in θ^* van een aan ψ beantwoordend inproduct wordt voor wortelvormen λ, μ

$$\mu(h_\lambda) = (\lambda, \mu) = \psi(h_\lambda, h_\mu) = \sum \rho (\lambda, \rho)(\mu, \rho).$$

Algemener $(\alpha, \beta) = \sum \rho (\alpha, \rho)(\beta, \rho)$ voor $\alpha, \beta \in \theta^*$.

De sommen lopen over de wortelvormen ρ .

De S_α worden spiegelingen

$$S_\alpha \xi = \xi - 2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha;$$

zij vormen de (eindige) kaleidoskoopgroep.

Voor niet verdwijnende wortelvormen λ, μ zijn de $(\lambda, \lambda) > 0$, de (λ, μ) rationaal. Op elke basis van wortelvormen bezitten alle wortelvormen rationale coördinaten.

Het inproduct is reëel, positief definitief in Θ_u^* ; hetzelfde geldt voor ψ in Θ_u .

46. Aan de kaleidoskoopgroep in Θ^* beantwoordt er door middel van $\tilde{f}$ een in Θ . We bewijzen:

De kaleidoskoopgroep in Θ wordt door een ondergroep van $e^{\tilde{f}}$ geïnduceerd.

Gegeven een wortelvorm $\alpha \neq 0$. We vormen

$$\begin{aligned} p_\alpha &= e_\alpha + e_{-\alpha}, \\ q_\alpha &= h_\alpha + \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)} (e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ r_\alpha &= h_\alpha - \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)} (e_\alpha - e_{-\alpha}). \end{aligned}$$

Dan is

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\alpha q_\alpha &= -\sqrt{2(\alpha, \alpha)} q_\alpha, \\ \tilde{p}_\alpha r_\alpha &= +\sqrt{2(\alpha, \alpha)} r_\alpha, \\ \tilde{p}_\alpha h_\alpha &= 0 \quad \text{voor elke } h \in \Theta \text{ met } \alpha(h) = 0. \end{aligned}$$

Met

$$\tau = \pi / \sqrt{-2(\alpha, \alpha)}$$

is

$$\begin{aligned} \tau \tilde{p}_\alpha q_\alpha &= \pi \sqrt{-1} q_\alpha, \\ \tau \tilde{p}_\alpha r_\alpha &= -\pi \sqrt{-1} r_\alpha, \\ \tau \tilde{p}_\alpha h &= 0 \quad \text{voor } h \in \Theta \text{ met } \alpha(h) = 0, \end{aligned}$$

dus

$$e^{\tau \tilde{p}_\alpha} q_\alpha = -q_\alpha, \quad e^{\tau \tilde{p}_\alpha} r_\alpha = -r_\alpha, \quad e^{\tau \tilde{p}_\alpha} h = h \quad \text{voor } h \in \Theta \text{ met } \alpha(h) = 0,$$

en wegens $2h_\alpha = q_\alpha + r_\alpha$:

$$e^{\tau \tilde{p}_\alpha} h_\alpha = -h_\alpha.$$

Dus stemt $e^{\tau \tilde{p}_\alpha}$ op Θ overeen met de afbeelding

$$h \rightarrow h - 2 \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_\alpha)} \alpha,$$

en dat is juist de aan S_α in Θ^* beantwoordende afbeelding. (Hieruit volgt niet dat $e^{\tilde{f}}$ een met de kaleidoskoopgroep isomorfe ondergroep zou bezitten. De $e^{\tau \tilde{p}_\alpha}$ brengen een groep ϕ voort met een normaaldeeler ϕ_0 bestaande uit die transformaties, die Θ elementsgewijs invariant laten, en pas ϕ/ϕ_0 is isomorf met de kaleidoskoopgroep.)

47. De in 43 verkregen normaalvorm van Γ was afhankelijk van de keuze van de stam Θ . We tonen aan, dat die afhankelijkheid in-essentieel is. Allereerst zal dit blijken t.o.v. het systeem W van de niet-verdwijnde wortelvormen. Ik kan W opvatten als

- 1) een systeem van vectoren in een 1-dimensionale ruimte met inproduct (te weten Θ^*),
- 2) een systeem van dingen, waartussen zekere relaties $\alpha + \beta = 0$ en $\alpha + \beta + \gamma = 0$ bestaan.

Door de (zwakkere) structuur (2) is de (sterkere) structuur (1) al bepaald (indien W een systeem van w.v. is). Want uit de gegevens (2) kan men achtereenvolgens bepalen alle ladders, hun lengten, de S_α voorzover ze op elementen van W werken (ze draaien de ladders ondersteboven), de (α, α) (zie in 43 de formule voor N_α , dat op 1 is genormeerd), de (α, β) (zie 45(9)), de vorm van het inproduct in Θ^* , de rang 1. W is dan op een orthogonale transformatie na in Θ^* ingebed.

We tonen nu aan, dat de structuur van W in de zwakke zin onafhankelijk is van de keuze van de stam.

Gegeven twee algemene elementen A, B van Γ , dan zijn de niet-verdwijnde wortels van $(1-\tau)A + \tau B$ algebraïsche functies van de complexe variabele τ , dus met slechts eindig veel singulariteiten (vertakkingspunten). We verbinden A, B door een weg Ω , die deze singulariteiten vermijdt, dus alleen algemene elementen bevat. Met deze berekenen we de stam en de wortelvormen $\mu(\tau)$, continue functies van τ , die we in 1 hunner kunnen uitdrukken

$$\mu(\tau) = \sum r_i(\tau) \mu_i(\tau), \quad \tau \in \Omega,$$

met rationale $r_i(\tau)$, die aan de andere kant continu van $\tau \in \Omega$ afhangen, dus constant zijn. Door deze r_i , die dus voor A en B dezelfde zijn, is de structuur van W in de zwakke zin eenduidig bepaald.

48. We tonen verder aan, dat door de structuur van W die van Γ op isomorfisme na eenduidig bepaald is, door Γ en Γ' met isomorfe W en W' op eenzelfde normaalvorm te brengen:

In Γ resp. Γ' is een stam Θ resp. Θ' bepaald. Hierbij horen wortelvormen α resp. α' , die we echter door dezelfde letter zullen aanduiden, als ze bij het isomorfe verband tussen W en W' aan elkaar beantwoorden. Bij de α horen takken e_α resp. e'_α en knopen h_α resp. h'_α . We veronderstellen Γ en Γ' met $N_\alpha = N'_\alpha = 1$ genormeerd!

We construeren een isomorfe afbeelding van Γ op Γ' .

Aan h_α laten we h'_α beantwoorden. Krachtens 44 (5) is deze relatie lineair op het systeem der h_α ; zij laat zich dus tot een afbeelding $h \rightarrow h'$ van Θ op Θ' ondubbelzinnig voortzetten.

Laten we aan e_α een veelvoud van e'_α beantwoorden, dan blijft in elk geval de relatie

$$[h, e_\alpha] = \alpha e_\alpha \quad (h \in \Theta)$$

bij overgang tot de beelden in Γ' behouden. We zullen de zaak zo formuleren, dat wij de gegeven e' gaan hernormeren, zodat e'_α zelf het beeld in Γ' van e_α wordt. Bij het hernormeren moet erop worden gelet, dat de normeringsfactoren van e'_α en $e'_{-\alpha}$ elkaars omgekeerden zijn, zodat de normering $N'_\alpha = 1$ niet verstoord wordt. Vanzelf wordt dan ook $h'_\alpha = [e'_\alpha, e'_{-\alpha}]$ niet gewijzigd.

De e'_γ moeten nu zo worden bepaald, dat

$$[e'_\alpha, e'_\beta] = [e_\alpha, e_\beta]'$$

(hierbij wordt onder $(ke_\gamma)'$ natuurlijk ke'_γ verstaan als k een scalair is).

Opmerking: Zij $\alpha, \beta, \gamma \in W$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Is aan

$$[e'_\alpha, e'_\beta] = [e_\alpha, e_\beta]'$$

reeds voldaan, dan is vanzelf ook aan

$$[e'_\beta, e'_\gamma] = [e_\beta, e_\gamma]'$$

voldaan.

Immers in

$$[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta, [e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma, [e_\alpha, e_\beta]] = 0$$

$$[e'_\alpha, [e'_\beta, e'_\gamma]] + [e'_\beta, [e'_\gamma, e'_\alpha]] + [e'_\gamma, [e'_\alpha, e'_\beta]] = 0$$

zijn de derde summanden gelijke veelvouden van h_γ resp. h'_γ , de andere summanden veelvouden van h_α en h_β resp. h'_α en h'_β . De essentieel enige relatie tussen deze elementen is echter

$$h_\alpha + h_\beta + h_\gamma = 0,$$

$$h'_\alpha + h'_\beta + h'_\gamma = 0$$

(zie 43 (5)). Dus moeten de andere summanden ook dezelfde veelvouden van h_α en h_β resp. h'_α en h'_β zijn, dus $[e_\beta, e_\gamma]$ en $[e'_\beta, e'_\gamma]$ dezelfde veelvouden van $e_{-\alpha}$ en $e'_{-\alpha}$. Dit was juist de bewering.

Op een geordende basis van elementen van W gaan we alle elementen van Θ_u^* volgens coördinaten lexicografisch rangschikken. Onder W_ρ verstaan we de verzameling wortelvormen μ met $-\rho < \mu < \rho$ (ρ een wortelvorm > 0).

We veronderstellen, dat de toevoeging $e_\mu \rightarrow e'_\mu$ al gelukt is binnen W , zodat dus

$$[e'_\lambda, e'_\mu] = [e_\lambda, e_\mu]' \text{ voor alle } \lambda, \mu \text{ met } \lambda, \mu, \lambda + \mu \in W_\rho. \quad (1)$$

We trachten hieraan ook te voldoen binnen $W_\rho \cup (\rho) \cup (-\rho)$, d.w.z. aan

$$[e'_\lambda, e'_\mu] = [e_\lambda, e_\mu]' \text{ met } \lambda, \mu \in W_\rho, \lambda + \mu = \pm \rho \quad (2)$$

$$[e'_{\pm \rho}, e'_\lambda] = [e_{\pm \rho}, e_\lambda]' \text{ met } \lambda, \lambda \pm \rho \in W_\rho \quad (3)$$

$$[e'_\rho, e'_{-\rho}] = [e_\rho, e_{-\rho}]'. \quad (4)$$

Is $\rho \neq \lambda + \mu$ voor alle $\lambda, \mu \in W_\rho$, dan geldt hetzelfde voor $-\rho$ en voor $\lambda \pm \rho$, dus dan vervallen de eisen 2-3, terwijl aan 4 bij voorbaat is voldaan. We mogen derhalve veronderstellen:

$$\rho = \alpha + \beta$$

voor zekere $\alpha, \beta \in W_\rho$. e'_ρ , hoe ook genormeerd, is veelvoud van $[e'_\alpha, e'_\beta]$. Eisen we dat e'_ρ hetzelfde veelvoud van $[e'_\alpha, e'_\beta]$ als e_ρ is van $[e_\alpha, e_\beta]$ dan is aan

$$[e'_\alpha, e'_\beta] = [e_\alpha, e_\beta]' \quad (5)$$

voldaan. Analoog kunnen we aan

$$[e'_\alpha, e'_{-\beta}] = [e_{-\alpha}, e_{-\beta}]' \quad (6)$$

voldoen, in het midden latende, of de normering $N_\rho = 1$ hierdoor niet wordt verstoord.

De definitie van $e'_{\pm \rho}$ hangt af van de keuze van de voorstelling $\rho = \alpha + \beta$. Zij ook nog

$$\rho = \gamma + \delta$$

voor zekere $\gamma, \delta \in W_\rho$. We tonen aan, dat (5) geldig blijft met γ, δ i.p.v. α, β . We hebben (Jacobi)

$$[[e'_\alpha, e'_\beta], e'_{-\gamma}] + [[e'_\beta, e'_{-\gamma}], e'_\alpha] + [[e'_{-\gamma}, e'_\alpha], e'_\beta] = 0. \quad (7)$$

Nu is $\beta < \rho$, dus $\alpha + \beta < \alpha + \rho$, dus $0 < \alpha$, dus $0 < \alpha < \rho$ en analoog $0 < \beta < \rho$, $0 < \gamma < \rho$, $0 < \delta < \rho$. Dus

$$-p < \alpha - \gamma < p,$$

$$-p < \beta - \gamma < p.$$

Dus

$\alpha - \gamma, \beta - \gamma$ geen wortelvormen, of $\in W_p$.

Verder

$$\delta = \alpha + \beta - \gamma \in W_p.$$

De 2^e en 3^e summand in (7) worden binnen W_p genoemd. Naar (1) mag ik daar de accenten naar buiten brengen. Overeenkomstig (6) is er een vergelijking zonder accenten. Ik mag dus ook in de 1e summand van (6)

$$[[e'_\alpha, e'_\beta] e'_\gamma] \quad (8)$$

de accenten naar buiten brengen. Speciaal geldt dit voor $\gamma = \alpha$, dus ook in

$$[[[e'_\alpha, e'_\beta], e'_\alpha], e'_\beta]$$

en analoog in

$$[[[e'_\alpha, e'_\beta], e'_\beta], e'_\alpha]$$

dus ook (Jacobi) in

$$[[e'_\alpha, e'_\beta], [e'_\alpha, e'_\beta]],$$

dus volgens (5) en (6) ook in

$$[[e_\alpha, e_\beta]', [e_{-\alpha}, e_{-\beta}']],$$

d.w.z. in

$$[e'_p, e'_{-p}].$$

Hiermee is (4) bereikt, dus de normering $N_p = 1$ gewaarborgd.

We kunnen derhalve nu profijt trekken van de "Opmerking". (8) in zijn algemene vorm levert

$$[e'_p, e'_\gamma] = [e_p, e_{-\gamma}]'$$

dus de helft van (3). Maar volgens de "Opmerking" is dan meteen ook voldaan aan

$$[e'_{-\gamma}, e'_{-\gamma}] = [e_{-\gamma}, e_{-\gamma}]'$$

dus aan de helft van (2). De andere helften volgen, als men p en $-p$ verwisselt. Hiermee is de uitbreidingsstap gelukt.

Structuurstelling voor halfenkelvoudige Lie-algebra's, 2e vervolg.

Γ en W bepalen elkaar wederzijds.

49. De afbeelding $\alpha \rightarrow -\alpha$ is een automorfisme van W , dat naar 48 wordt geïnduceerd door een automorfisme van Γ , waarbij

$$h_\alpha \rightarrow h_{-\alpha} \quad \text{voor } \alpha \in W,$$

$$h \rightarrow -h \quad \text{voor } h \in \theta,$$

$$e_\alpha \rightarrow \nu_\alpha e_{-\alpha}$$

met zekere scalairen ν_α , waarvoor wegens

$$h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \rightarrow \nu_\alpha \nu_{-\alpha} [e_{-\alpha}, e_\alpha] = -\nu_\alpha \nu_{-\alpha} h_{-\alpha} = \nu_\alpha \nu_{-\alpha} h_\alpha \quad \text{geldt}$$

$$\nu_\alpha \nu_{-\alpha} = 1. \quad (1)$$

We vervangen nu e_α door

$$e'_\alpha = \sqrt{\nu_{-\alpha}} e_\alpha,$$

waarbij de tekens van de vierkantswortels zo bepaald zijn, dat

$$\sqrt{\nu_\alpha} \sqrt{\nu_{-\alpha}} = 1,$$

zodat de normering $N_\alpha = 1$ niet wordt verstoord. Dit kan wegens (1). Het onderhavige automorfisme bewerkt

$$e'_\alpha \rightarrow \sqrt{\nu_{-\alpha}} \nu_\alpha e_{-\alpha} = \sqrt{\nu_\alpha} e_{-\alpha} = e'_{-\alpha}.$$

We vervangen nu de e_α door de e'_α . Na deze "tweede normering" bezit Γ een automorfisme van de vorm

$$e_\alpha \rightarrow e_{-\alpha},$$

$$h_\alpha \rightarrow h_{-\alpha}, \quad (2)$$

$$h \rightarrow -h \quad \text{voor } h \in \theta$$

We houden deze normering vast. Nog verder te normeren, om de tekens van de $N_{\alpha,\beta}$ vast te leggen, zou mogelijk, maar onbelangrijk zijn.

We hebben

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta},$$

$$[e_{-\alpha}, e_{-\beta}] = N_{-\alpha,-\beta} e_{-\alpha-\beta},$$

dus

$$N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}. \quad (3)$$

We berekenen $N_{\alpha,\beta}$:

In 39 hadden we voor een α -ladder met laagste wortelvorm μ , $x \in \Gamma_\mu$ en $x_j = \tilde{e}^j x$:

$$\tilde{e}_{-\alpha} \tilde{e}_\alpha x_j = \rho_j x_j,$$

waarbij

$$\begin{aligned} f_j &= - \sum_{i=0}^j (\mu + i\alpha, \alpha) = \sum_{i=0}^j (\tfrac{1}{2}p - i)(\alpha, \alpha) = \\ &= \tfrac{1}{2}(p-j)(j+1)(\alpha, \alpha), \end{aligned}$$

waarbij p de lengte van die ladder is.

Dus geldt voor elke e_β

$$\tilde{e}_{-\alpha} \tilde{e}_\alpha e_\beta = \tfrac{1}{2} k k' (\alpha, \alpha),$$

indien β in zijn α -ladder het k -de element van onderen en er k' naar boven op volgen (i.p.v. $j+1$ en $p-j$ daarnet).

$$\tilde{e}_{-\alpha} \tilde{e}_\alpha e_\beta = N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta},$$

dus

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} = \tfrac{1}{2} k k' (\alpha, \alpha).$$

Uit Jacobi op $e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{\alpha+\beta}$ toegepast, volgt

$$N_{-\alpha, -\beta} h_{-\alpha-\beta} + N_{-\beta, \alpha+\beta} h_\alpha + N_{\alpha+\beta, -\alpha} h_\beta = 0,$$

dus wegens

$$h_{-\alpha-\beta} + h_\alpha + h_\beta = 0$$

en de onafhankelijkheid van h_α en h_β , dat de N onderling gelijk zijn.

Dus

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = -\tfrac{1}{2} k k' (\alpha, \alpha),$$

dus naar (3)

$$N_{\alpha, \beta} = \sqrt{-\tfrac{1}{2} k k' (\alpha, \alpha)} \text{ zuiver imaginair.}$$

50. Uit de complexe Lie-algebra lichten we nu een reële (waarvan Γ de complexe uitbreiding is), de zogenaamde unitaire beperking Γ_u :

Na de normering van 49 zij het algemene element van Γ_u :

$$ih + \sum_{h \in \Theta_u} \tau_\rho e_\rho,$$

waarbij

en

$$\tau_\rho + \bar{\tau}_{-\rho} = 0$$

($i = \sqrt{-1}$).

Θ_u was de verzameling der reële combinaties der h_α ; anders gezegd de verzameling van die h , waarvoor alle wortelvormen reëel zijn.

$i\Theta_u$ is dus de verzameling van alle $h \in \Theta$ met zuiver imaginaire wortels.

Γ_u is een reële lineaire ruimte voortgebracht door $i\theta_u$ en de $e_\alpha - e_{-\alpha}$ en $i(e_\alpha + e_{-\alpha})$. We tonen aan, dat Γ_u een reële Lie-algebra is:

$$\begin{aligned} [ih, e_\alpha - e_{-\alpha}] &= \alpha(h)i(e_\alpha + e_{-\alpha}), \\ [ih, i(e_\alpha + e_{-\alpha})] &= -\alpha(h)(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ [e_\alpha - e_{-\alpha}, i(e_\alpha + e_{-\alpha})] &= 2ih_\alpha, \\ [e_\alpha - e_{-\alpha}, e_\beta - e_{-\beta}] &= \frac{1}{i} N_{\alpha, \beta} \cdot i(e_{\alpha+\beta} + e_{-\alpha-\beta}) - \frac{1}{2} N_{\alpha, -\beta} \cdot i(e_{\alpha-\beta} + e_{-\alpha+\beta}), \\ [e_\alpha - e_{-\alpha}, i(e_\beta + e_{-\beta})] &= iN_{\alpha, \beta} \cdot (e_{\alpha+\beta} - e_{-\alpha-\beta}) + iN_{\alpha, -\beta} \cdot (e_{\alpha-\beta} - e_{\beta-\alpha}), \\ [i(e_\alpha + e_{-\alpha}), i(e_\beta + e_{-\beta})] &= -\frac{1}{i} N_{\alpha, \beta} i(e_{\alpha+\beta} + e_{-\alpha-\beta}) - \frac{1}{i} N_{\alpha, -\beta} \cdot \\ &\quad \cdot i(e_{\alpha-\beta} + e_{\beta-\alpha}). \end{aligned}$$

Hier zijn alle coëfficiënten inderdaad reëel (voor $h \in \theta_u$).

Hoe ziet ψ er op Γ_u uit? $\psi(h, h) \geq 0$ voor $h \in \theta_u$, dus $\psi(ih, ih) \leq 0$.

$$\psi(\tau_\alpha e_\alpha - \bar{\tau}_\alpha e_{-\alpha}, \tau_\alpha e_\alpha - \bar{\tau}_\alpha e_{-\alpha}) = -2\tau_\alpha \bar{\tau}_\alpha \leq 0.$$

Dus is ψ op Γ_u negatief definitief. Op een t.a.v. $i\theta_u$ orthonormale basis en verder de $\frac{1}{2}\sqrt{2}(e_\alpha - e_{-\alpha})$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}(e_\alpha + e_{-\alpha})$ als basis-elementen wordt $\psi(x, x) = \text{minus een som van kwadraten}$. $\tilde{\Gamma}_u$ wordt infinitesimaal-algebra van een reële draaigroep.

Γ is de complexe uitbreiding. Er zijn meer reële Lie-algebras, in Γ waarvan Γ de complexe uitbreiding is. Om allerlei redenen is de "unitaire" bijzonder belangrijk, vooral omdat de bijbehorende θ_u compact blijkt te zijn.

θ_u samen met de ie_α brengt ook een reële Lie-algebra voort. Want

$$\begin{aligned} [ie_\alpha, ie_\beta] &= iN_{\alpha, \beta} ie_{\alpha+\beta} \quad \text{voor } \alpha+\beta \neq 0, \text{ met reële } iN_{\alpha, \beta} \\ [ie_\alpha, ie_{-\alpha}] &= -h_\alpha \in \theta_u, \\ [h, ie_\alpha] &= \alpha(h)ie_\alpha \quad \text{met reële } \alpha(h) \text{ voor } h \in \theta_u. \end{aligned}$$

De complexe uitbreiding van deze reële algebra is weer Γ . We noemen deze reële algebra (met complexe uitbreiding Γ) de standaard-bepijking Γ_s .

Hoe ziet ψ er op Γ_s uit? $\psi(h, h)$ ($h \in \theta$) is positief definitief, terwijl de rest wegens $\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ (overigens 0) evenveel positieve als negatieve kwadraten oplevert. Dus signatuur van $\psi = \text{rang van } \Gamma$.

Structuurstelling voor halfenkelvoudige Lie-algebras, 3^e ver-volg.

Na een tweede normering is er een automorfisme met $h \rightarrow -h$ (voor $h \in \theta$), $e_\alpha \rightarrow e_{-\alpha}$ voor Γ , is

$N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ imaginair, en is de unitaire beperking Γ_u (met $\lambda(\theta \wedge \Gamma_u)$ imaginair voor $\lambda \in W$ en tegengesteld geconjugeerde coëfficiënten van e_α en $e_{-\alpha}$) een reële Lie-algebra met negatief definitieve ψ op Γ_u , en is verder de standaardbeperking (voortgebracht door θ en de ie_α) een reële Lie-algebra met signatuur $\psi = \text{rang } \Gamma$.

51. Als voorbeeld beschouwen we de groep der projectieve transformaties, die een reële kegelsnede invariant laten; door projectie ook te vereenzelvigen met de projectieve groep van de rechte, dus met de groep der gebroken lineaire transformaties

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

of (in het klein) met de groep der 2-2-matrices met determinant 1. Als basis der Lie-algebra kiezen we

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dus $[A, B] = 2B$, $[A, C] = -2C$, $[B, C] = A$. Met de veelvouden $h = pA$ van A als stam, worden de niet verdwijnende wortelvormen

$$\lambda(h) = 2p, \quad -\lambda(h) = -2p,$$

verder

$$(\lambda, \lambda) = \frac{1}{2}.$$

Voor de unitaire beperking kiezen we als basis-elementen

$$K = iA = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad L = B - C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = i(B + C) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

die juist de unitaire groep in 2 variabelen voortbrengen. Meetkundig is de unitaire beperking verkrijgbaar door de (komplexe) rechte als stereografisch beeld van de 2-sfeer met de draaigroep op te vatten. Behalve de unitaire heeft men de gewone reële (standaard-) structuur (reële projectieve groep van de rechte). De geadjungeerde groepen bezitten resp. de bases

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De invariante kwadratische vorm ψ is indefiniet, resp. definit (invariante reële of nuldelige kegelsnede).

52. We beschouwen weer de algebra's $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{V}_1$. In alle gevallen bestond θ uit diagonaalmatrices. De takken waren zo gekozen, dat $e_\alpha, e_{-\alpha}$ reëel en elkaars gespiegelden waren. Door berekening van $[[e_\alpha, e_{-\alpha}]e_\alpha]$ blijkt dat in alle gevallen $\alpha(h_\alpha) > 0$ is (waaruit ook de halfenkelvoudigheid volgt). De formule in 43 toont aan, dat N_α positief is. De normeringsfactoren ten behoeve van $N_\alpha=1$ kunnen dus reëel en voor e_α en $e_{-\alpha}$ dezelfde zijn. De nieuwe $e_\alpha, e_{-\alpha}$ zijn nog steeds reëel en elkaars gespiegelden.

Voor lineaire groepen is $a \rightarrow a'^{-1}$ een isomorfisme, voor lineaire Lie-algebra's is dus

$$\eta : A \rightarrow -A'$$

een isomorfisme (ook rechtstreeks in te zien). In onze gevallen is het zelfs een automorfisme, want met A heeft ook $-A'$ het spoor 0, en met A voldoet ook $-A'$ aan $AS+SA'=0$ (omdat $S=S^{-1}$ is).

$\eta h = -h$ voor alle $h \in \theta$ en $\eta e_\alpha = -e_{-\alpha}$. Bij de tweede normering hoort dus bijvoorbeeld e_α door ie_α en $e_{-\alpha}$ door $-ie_{-\alpha}$ te worden vervangen. In de unitaire beperking treden ie_α en $-ie_{-\alpha}$ met tegengesteld geconjugeerde coëfficiënten op; dus geldt hetzelfde als we e_α en $e_{-\alpha}$ als basiselementen aanhouden. In de unitaire beperking zijn de diagonaalelementen zuiver imaginair. Aangezien e_α en $e_{-\alpha}$ gespiegelden waren, bestaat de unitaire beperking in de eis

$$A = -A',$$

oftewel

$$A + A' = 0.$$

Door dezelfde eis (en spoor 0) is echter de Lie-algebra van de unitaire groep gekenmerkt. We kunnen dus zeggen:

De unitaire beperking van de complexe lineaire Lie-groepen (Lie-algebra's) $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{V}_1$ is gelijk aan hun doorsnee met de

(Lie-algebra van) de unitaire groep (in $1+1$, $2l+1$, $2l$, $2l$ dimensies).

Dit verklaart de naam "unitaire beperking".

Voor de standaardbeperking noemen we de reële diagonaal-matrices en de reële veelvouden der oorspronkelijke e_α . De standaardbeperking stemt overeen met de oorspronkelijke algebra van matrices, maar dan met alleen reële coëfficiënten.

53. In de gevallen $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{V}_1$ is de unitaire beperking na geschikte basiskeuze gewoon de reële draaigroep in $2l+1$ resp. $2l$ dimensies. We laten dit zien voor $\mathcal{V}_1$; voor $\mathcal{L}_1$ gaat het eender. De unitaire beperking bestaat uit de A met

$$AS + SA' = 0,$$

$$A + A' = 0,$$

dus ook

$$A = SAS,$$

waarbij

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Door
$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \bar{P} = PS = SP$$

($1+i$ betekenen hier l -dim. 1 -matrices maal $1+i$) kunnen we S brengen op de gedaante

$$PSP' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De A worden dan getransformeerd in

$$PAP^{-1},$$

en die zijn reëel, want

$$\overline{PAP^{-1}} = \bar{P} \bar{A} \bar{P}^{-1} = PS \cdot SAS \cdot P = PASP = PAP^{-1}.$$

Door die transformatie krijgen we dus de reële orthogonale groep.

54. Voor onafhankelijke $\lambda, \mu \in W$ is

$$-2 \frac{(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)} \cdot -2 \frac{(\lambda, \mu)}{(\mu, \mu)} \quad (1)$$

geheel, maar aan de andere kant

$$= 4 \cos^2 \angle(\lambda, \mu),$$

dus tussen 0 en 4, dus

$$\begin{aligned} \cos \angle(\lambda, \mu) &= 0, \quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{1}, \quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}. \\ \angle(\lambda, \mu) &= 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 30^\circ, 150^\circ. \end{aligned}$$

Voor $(\lambda, \mu) \neq 0$ moet één der factoren in (1), bijvoorbeeld

$$-2 \frac{(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)} = \pm 1,$$

de ander kan

$$-2 \frac{(\lambda, \mu)}{(\mu, \mu)} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

zijn.

Er zijn geen ladders langer dan 3. Wegens

$$2(\lambda, \mu) = \pm(\lambda, \lambda)$$

is

$$\cos^2 \angle(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda, \lambda)}{(\mu, \mu)},$$

dus is in de gevallen van een hoek $\neq 90^\circ$ de lengte-verhouding van de twee vectoren λ en μ geheel bepaald,

$$\sqrt{1}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}$$

(maar kan natuurlijk in de ene of in de andere richting lopen).

Door van deze gegevens gebruik te maken, kan men de mogelijke systemen W met meetkundige methoden classificeren (zie v.d. Waerden, Math. Zeitschr.37). We volgen hier een andere weg.

55. In Θ_u^* kiezen we een willekeurig geordende basis en ordenen de elementen van Θ_u^* lexicografisch naar de coördinaten op deze basis. Een positieve wortelvorm heet dan primitief, als hij niet als som van twee primitieve wortelvormen kan worden voorgesteld. De primitieve wortelvormen leveren een verzameling $P \subset W$ op. Elke positieve wortelvorm kan door successieve splitsing als som van primitieve worden geschreven. Elke wortelvorm is dus een lineaire combinatie van primitieve met gehele coëfficiënten, alle ≥ 0 of, alle ≤ 0 . (Zie ook $\alpha_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{V}_1$).

Voor verschillende $\lambda, \mu \in P$ is $(\lambda, \mu) \leq 0$. Want was $(\lambda, \mu) > 0$, dus was $\lambda - \mu$ en $\mu - \lambda$ ook wortelvorm; een hunner zou positief zijn, dus λ of μ imprimitief.

De elementen van P zijn lineair onafhankelijk.

Want stel

$$\lambda = \sum r_i \lambda_i + \sum r_j \lambda'_j \quad \text{met} \quad r_i > 0, \quad r_j < 0$$

waarbij $\lambda, \lambda_i, \lambda'_j \in P$ en alle $\lambda_i \neq$ alle λ'_j . Dan is $(\sum r_i \lambda_i, \sum r_i \lambda_i) > 0$ wegens de positief-definitiviteit van dit inproduct voor reële r_i . Maar ook $(\sum r_i \lambda_i, \sum r_i \lambda_j) \geq 0$.

wegens $(\lambda_i, \lambda'_j) \leq 0$ en $r_i r_j < 0$. Dus (optellen!)

$$(\sum r_i \lambda_i, \lambda) > 0$$

in strijd met $(\lambda_i, \lambda) \leq 0$ en $r_i > 0$.

De elementen van P vormen dus een reële basis van Θ_u ; hun aantal is 1. (Zie weer $\alpha_1, \lambda_1, \lambda'_1, \rho_1$.)

P hangt natuurlijk van de gekozen orde in Θ_u af. Elk systeem P van wortelvormen, waaruit alle met gehele coëfficiënten (alle ≥ 0 of alle ≤ 0) kunnen worden gecombineerd, is op deze wijze verkrijgbaar. Immers gaat men van P als basis uit, dan blijken alle elementen van P primitief te zijn.

56. W kan stapsgewijs uit P worden opgebouwd door het volgende procédé:

Is $\alpha > 0$ reeds verkregen, dan bepale men een $\rho \in P$, zodat

$$m = -2 \frac{(\alpha, \rho)}{(\rho, \rho)} > 0$$

is. Men vulle de verkregen verzameling aan met

$$\alpha + m\rho.$$

Immers, zij β de laagste nog niet verkregen positieve wortelvorm,

$$\beta = \sum r_i \rho_i, \quad r_i > 0, \quad \rho_i \in P.$$

$$(\beta, \sum r_i \rho_i) = (\beta, \beta) > 0;$$

dan is er een i met

$$(\beta, r_i \rho_i) > 0.$$

Maar dan is

$$m = 2 \frac{(\beta, \rho_i)}{(\rho_i, \rho_i)} > 0$$

en

$$\alpha = \beta - m \rho_i \in W.$$

Was $m > r_1$, dan had α een negatieve coördinaat, dus waren al zijn coördinaten ≤ 0 , dus $\beta = r_1 \rho_1$, dus $r_1=1$, en dan was β al in P . Dus $m \leq r_1$, dus ook $\alpha > 0$, dus (omdat β de laagste was) α reeds aanwezig.

$$-2 \frac{(\alpha, \rho_1)}{(\rho_1, \rho_1)} = -m + 2m = m.$$

Dus levert de aangegeven stap de gewenste β op.

W is dus door P bepaald, en wel hoeft men van P alleen de waarden der (ρ, σ) ($\rho, \sigma \in P$) te kennen. (Of ook de abstracte structuur van P door W bepaald is, onafhankelijk van de keuze van de orde, is hier nog niet gebleken.) Γ is dus ook door P bepaald. De structuur van P wordt door een grafisch schema weergegeven:

Aan elk element van P late men een stip beantwoorden. Twee stippen ρ, σ worden door j strepen verbonden, indien

$$\cos \angle (\rho, \sigma) = -\frac{1}{2} \sqrt{j}$$

is (merk op dat volgens 54 $(\rho, \sigma) \leq 0$) is. Er komen dus gevallen van 0, 1, 2, 3 strepen voor. Voor het geval van $j > 1$ strepen moet men nog weten, wie van de ρ en σ de grotere vectorlengte heeft. Men zette in de strepen een pijlpunt, die van de kortere naar de langere wijst. De verhouding is in elk geval $\sqrt{j}$ (zie 53).

Anders gezegd: Een j -voudige pijl van ρ naar σ betekent:

$$(\rho, \rho) : (\rho, \sigma) : (\sigma, \sigma) = 1 : -\frac{1}{2}j : j.$$

Valt P in twee systemen P', P'' zonder wederzijdse bindingen uiteen, dan is $(\rho', \rho'') = 0$ voor $\rho' \in P', \rho'' \in P''$, dus de door P' voortgebrachte lineaire ruimte loodrecht op die door P'' voortgebrachte. Dus leidt het proces (55) tot geen andere wortelvormen dan lin.combinaties uit P' alleen of P'' alleen; deze systemen heten resp. W', W'' . Voor $\alpha' \in W', \alpha'' \in W''$ is $(\alpha', \alpha'') = 0$, dus $[h_{\alpha'}, h_{\alpha''}] = [h_{\alpha'}, e_{\alpha''}] = [h_{\alpha''}, e_{\alpha'}] = [e_{\alpha'}, e_{\alpha''}] = 0$. Dus horen bij W', W'' resp. Γ', Γ'' , die idealen in Γ zijn met $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ (directe som). Het omgekeerde is ook gemakkelijk in te zien. Dus:

W is onverbonden vereniging van W', W'' dan en slechts dan als Γ overeenkomstig directe som van Γ' en Γ'' is.

57. We hebben al vast de schema's (dimensies erachter vermeld):

$$\begin{array}{lcl}
 \alpha_l & \left| \begin{array}{c} \dot{p}_1 - \dot{p}_2 - \dot{p}_3 \cdots \dot{p}_{l-2} - \dot{p}_{l-1} - \dot{p}_l \end{array} \right. & (l+1)^2 - 1 \\
 \mathcal{L}_l & \left| \begin{array}{c} \dot{p}_2 - \dot{p}_3 - \dot{p}_4 \cdots \dot{p}_{l-1} - \dot{p}_l \Rightarrow \dot{p}_1 \end{array} \right. & l(2l+1) \\
 \mathcal{L}'_l & \left| \begin{array}{c} \dot{p}_1 - \dot{p}_2 - \dot{p}_3 \cdots \dot{p}_{l-2} - \dot{p}_{l-1} \Leftarrow \dot{p}_l \end{array} \right. & l(2l+1) \\
 \mathcal{V}_l & \left| \begin{array}{c} \dot{p}_3 - \dot{p}_4 - \dot{p}_5 \cdots \dot{p}_{l-1} - \dot{p}_l \leq \dot{p}_1 \end{array} \right. & l(2l-1)
 \end{array}$$

De stippen zijn neergezet in de volgorde zoals bij de diverse typen de primitieve wortelvormen waren opgesomd, maar deze zijn achteraf anders genummerd (nummering van E. Cartan).

Het is evident, dat geen andere bindingen dan de opgetekende voorkomen, b.v. kunnen $\omega_1 - \omega_2$ en $\omega_3 - \omega_4$ niet zijn gebonden, omdat $(\omega_1 - \omega_2) + (\omega_3 - \omega_4)$ niet wortelvorm is. $\omega_1 - \omega_2$ en $\omega_2 - \omega_3$ zijn enkelvoudig gebonden, omdat $(\omega_1 - \omega_2) + (\omega_2 - \omega_3) = \omega_1 - \omega_3$ wel wortelvorm is, maar $(\omega_1 - \omega_2) + 2(\omega_2 - \omega_3)$ niet. In het geval $\mathcal{L}_1$ is $\omega_{1-1} - \omega_{1+j}\omega_1$ met $j=1,2$ wortelvorm, dus

$$-2 \frac{(\omega_{1-1} - \omega_1, \omega_1)}{(\omega_1, \omega_1)} = 2,$$

$$\text{dus (zie 53)} \quad -2 \frac{(\omega_{1-1} - \omega_1, \omega_1)}{(\omega_{1-1} - \omega_1, \omega_{1-1} - \omega_1)} = 1,$$

dus $(\omega_1, \omega_1) < (\omega_{1-1} - \omega_1, \omega_{1-1} - \omega_1)$. In het geval $\mathcal{L}'_1$ is het omgekeerd, omdat net $(\omega_{1-1} - \omega_1) + 2\omega_1$ wortelvorm is. Enz.

Uit de schema's maakt men isomorfiën op:

$$\alpha_1 = \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}'_1 \quad (1)$$

($\mathcal{V}_1$ was niet gedefinieerd),

$$\mathcal{L}_2 \cong \mathcal{L}'_2, \quad (2)$$

$$\mathcal{V}_2 \cong \alpha_1 + \alpha_1 \quad (3)$$

$$\alpha_3 \cong \mathcal{V}_3. \quad (4)$$

We kunnen dit ook rechtstreeks inzien:

1) $\alpha_1 \cong \mathcal{L}'_1$ is triviaal. - $\alpha_1 \cong \mathcal{L}_1$ is het bekende isomorfisme (in het klein) tussen de projectieve groep van de rechte (functietheoretisch vlak) en de draaigroep in 3 dimensies door stereografische projectie (zie ook 51).

2) Vat men de R_4 als projectieve 3-ruimte op, dan kan men de rechte p door de punten $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ en $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ beschrijven door de Plückercoördinaten

$$\pi_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i \quad (i < j),$$

$$\pi_{12} \pi_{34} + \pi_{13} \pi_{42} + \pi_{14} \pi_{23} = 0.$$

De antisymmetrische S bepaalt een "nulsysteem", waardoor aan een punt x een poolvlak $u=Sx$ wordt toegevoegd. Twee punten x, y heten toegevoegd t.o.v. het nulsysteem, indien elk in het poolvlak van de ander ligt, dus als

$$(Sx, y) = 0,$$

d.w.z.

$$\sum \sigma_{ij} x_i y_j = 0,$$

als (σ_{ij}) de matrix van S is. De rechten p door aan elkaar toegevoegde punten heten rechten van het nulsysteem. Zij zijn dus door

$$\sum \sigma_{ij} \pi_{ij} = 0$$

gekenmerkt.

De lineaire groep in R_4 (projectieve in de projectieve 3-ruimte) induceert een voorstelling in de lin. ruimte R_6 van de antisymmetrische grootheden $(\pi_{ij}, i, j=1, \dots, 4)$ doordat aan

$$\xi_{i'}' = \sum_i \alpha_{i'i} \xi_i$$

beantwoordt

$$\pi_{i'j'}' = \sum_{ij} \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} \pi_{ij}.$$

Zijn π_{ij} de Plückercoördinaten van een rechte, dan zijn de π_{ij}' het ook. De formules beschrijven dus onder meer de afbeeldingen van de variëteit der rechten.

Aan de lineaire transformaties, die de bilineaire vorm S (projectieve, die het nulsysteem) invariant laten, beantwoorden in de R_6 lineaire transformaties, die de door

$$\sum \sigma_{ij} \pi_{ij} = 0$$

bepaalde R_5 invariant laten. Bovendien blijft de kwadratische vorm (het kwadratisch hypervlak)

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} (=0)$$

invariant (de variëteit der rechten). Dus beantwoordt aan de symplectische groep in de R_4 een groep met invariante kwadratische vorm in R_5 . (Men overtuige zich er nog van, dat dit een "isomorfisme op" is.)

3) De projectieve transformaties van de 3-ruimte, die een kwadriek invariant^{laten}, laten elke schaar beschrijvenden als geheel invariant of verwisselen de scharen. We kunnen ons tot het eerste soort bepalen. Deze is direct product van twee ondergroepen, waarvan elk een schaar elementsgewijs invariant laat; elk der scharen is wezenlijk een projectieve rechte; de ondergroepen zijn wezenlijk de groepen der projectieve rechte. Dus $\mathcal{V}_2$ direct product van tweemaal α_1 .

Of anders: de draaiingen in de R_4 laten zich als quaternionen-vermenigvuldigingen schrijven,

$$D_{pq} : x \rightarrow p \times q^{-1},$$

die in de R_3 eveneens,

$$B_p : x \rightarrow p \times p^{-1} \quad (\text{Re } x = 0).$$

Laat men het paar

$$[B_p, B_q] \text{ van twee elementen van } \mathcal{S}_1$$

beantwoorden aan

$$D_{pq} \in \mathcal{V}_2,$$

dan heeft men een homomorfisme met als kern de afb. $x \rightarrow x$ en $x \rightarrow -x$ van $\mathcal{V}_2$. In het klein is dat een isomorfisme.

4) Analoog aan (2) is het geval $\alpha_3 \cong \mathcal{V}_3$. Alleen vervalt hier het invariante nulsysteem, zodat men aan de ene kant de hele α_3 krijgt, terwijl aan de andere kant de hele R_6 (niet alleen een R_5) een rol speelt.

58. Samenvatting:

Structuurstelling van halfenkelvoudige Lie-algebra's, slot

In het systeem W der wortelvormen is voor $\lambda \neq \mu$: $\cos \frac{1}{2}(\lambda, \mu) = +\frac{1}{2}\sqrt{j}$ ($j=0,1,2,3$) en de verhouding tussen (λ, λ) en (μ, μ) is j voor $j \neq 0$.

W bezit een basis P van primitieve wortelvormen, waaruit heel W met gehele coëfficiënten, alle ≥ 0 of alle ≤ 0 , kan worden opgebouwd. In P geldt $(\rho, \sigma) \leq 0$ voor $\rho \neq \sigma$.

Γ en W vallen overeenkomstig uiteen in de zin van directe som resp. loodrechte deelsystemen.

59. Complexe classificatie van de halfenkelvoudige Lie-algebra's

(1) We kunnen ons naar het tweede criterium voor halfenkelvoudigheid beperken tot enkelvoudige Γ met rang ≥ 1 .

(2) We trachten alle systemen P te bepalen. We bekommeren ons voorlopig niet om de lengten van de elementen van P , maar normeren ze allemaal op lengte 1. Dan komt alles neer op de bepaling van de klasse $\mathcal{P}$ van alle systemen P van vectoren van reële euclidische ruimten met de eigenschappen:

A: Uit $\alpha \in P$ volgt $|\alpha| = 1$,

B: De elementen van P zijn onderling onafhankelijk.

C: Voor $\alpha, \beta \in P$, $\alpha \neq \beta$ is $(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sqrt{s}$ met $s=0,1,2,3$.

D: P is niet vereniging van onderling orthogonale deelsystemen.

(3) Met de notatie van 2C heet α, β s -voudig gebonden voor $s \neq 0$, ongebonden voor $s=0$. De aldus ontstaande graaf is samenhangend.

(4) Is $P \in \mathcal{P}$, $P' \subset P$ en een graaf van P' samenhangend, dan is $P' \in \mathcal{P}$.

(5) De graaf van een $P \in \mathcal{P}$ kan geen "cirkel" zijn. Want zij

$$P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \text{ met } (\alpha_j, \alpha_{j+1}) \neq 0 \text{ (voor } j=1, \dots, m \text{ mod } m).$$

Dan is

$$\begin{aligned} |\sum \alpha_j|^2 &= \sum |\alpha_j|^2 + \sum_{i \neq j} (\alpha_i, \alpha_j) \\ &\leq m + 2 \sum (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \leq 0 \end{aligned}$$

hetgeen onmogelijk is wegens 2B.

(6) De graaf van een $P \in \mathcal{P}$ kan geen cirkel bevatten, is dus volgens 3 een boom.

(7) Een element van P heet k -zijdig, als het aan k elementen van P gebonden is. Is $P \in \mathcal{P}$ en α k -zijdig, dan valt $P \setminus (\alpha)$ in precies k niet lege deelsystemen $\in \mathcal{P}$ uiteen, de door α bepaalde "takken".

(8) Is P een verzameling vectoren, dan zij $L(P)$ de door P bepaalde lineaire ruimte.

(9) Voor $P \in \mathcal{P}$ en de $\alpha \in P$ definiëren we

$$\varphi(P, \alpha) = \text{kwadraat van de afstand } (\alpha, L(P \setminus (\alpha))).$$

Dus

$$0 \leq \varphi(P, \alpha) \leq 1$$

en voor $\alpha \in P' \subset P \in \mathcal{P}$:

$$\varphi(P', \alpha) \geq \varphi(P, \alpha).$$

(10) Laat $\alpha \in P \in \mathcal{P}$ zijn en laten P_j de door α in P bepaalde takken zijn. Laat $\alpha_j \in P_j$ aan α s_j -voudig gebonden zijn. (Volgens 6 zijn deze α_j ondubbelzinnig bepaald.)

$$\begin{aligned} \text{Zij} \quad a_j &= \varphi(P_j, \alpha_j), \\ a &= \varphi(P, \alpha). \end{aligned}$$

Dan is

$$a \leq 1 - \sum_j \frac{s_j}{4a_j}.$$

(Deze formule is de sleutel tot al hetgeen volgt.)

Bewijs: Per definitie is er een

$$\gamma_j \in L(P_j \setminus (\alpha_j))$$

met

$$|\alpha_j - \gamma_j|^2 = a_j.$$

De elementen van verschillende P_j zijn onderling orthogonaal, dus

$$(\alpha_i - \gamma_i, \alpha_j - \gamma_j) = 0 \quad \text{voor } i \neq j.$$

Verder

$$(\alpha, \alpha_j - \gamma_j) = (\alpha, \alpha_j) = -\frac{1}{2} \sqrt{s_j}.$$

Stel

$$\beta = \alpha - \sum x_j (\alpha_j - \gamma_j),$$

dus

$$|\beta|^2 = 1 + \sum \sqrt{s_j} x_j + \sum a_j x_j^2.$$

We bepalen de reële scalairen x_j zo, dat dit minimaal wordt, te weten

$$x_j = -\frac{\sqrt{s_j}}{2a_j}.$$

Dan is

$$|\beta|^2 = 1 - \sum \frac{s_j}{4a_j}.$$

Hieruit volgt het gestelde.

(11) De elementen van $P \in \mathcal{P}$ kunnen op zijn hoogst driezijdig zijn. Want in de som uit 10 is elke summand $\geq \frac{1}{4}$, dus zijn er wegens $a > 0$ ten hoogste drie.

(12) Zij $P, P_1 \in \mathcal{P}$, $P_1 \subset P$ ($i=1,2$), $P=P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = (\alpha)$. Zij

$$\varphi(P_1, \alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

Dan is

$$\varphi(P, \beta) \leq \frac{1}{2} \quad \text{voor } \beta \in P_2.$$

Bewijs: Voor $P_2 = \{\alpha, \beta\}$ is dat een gevolg van 10:

$$\varphi(P, \beta) \leq 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Inductie en toepassing van 9 levert het gestelde op.

(13) Voor elk minstens tweezijdig $\alpha \in P \in \mathcal{P}$ geldt

$$\varphi(P, \alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

Bewijs: Zij α gebonden aan α_1, α_2 . Het is voldoende, het gestelde voor het systeem $\{\alpha_1, \alpha, \alpha_2\}$ te bewijzen. Volgens 10 is

$$\varphi(P, \alpha) \leq 1 - \frac{1}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

(14) Bezit $P \in \mathcal{P}$ een driezijdig element β , dan is $\varphi(P, \alpha) \leq \frac{1}{2}$ voor elke $\alpha \in P$.

Bewijs: Zij P' een door β bepaalde tak, zodat $\alpha \in P'$ zodra $\alpha \neq \beta$. Zij $P'' = P \setminus P'$. Dan is $\beta \in P'' \in \mathcal{P}$. In P'' is β minstens tweezijdig, dus volgens 13 $\varphi(P'', \beta) \leq \frac{1}{2}$, dus volgens 12 $\varphi(P, \alpha) \leq \frac{1}{2}$.

(15) Geen $P \in \mathcal{P}$ kan meer dan één driezijdig element bezitten.

Bewijs: Stel α en β driezijdig in $P \in \mathcal{P}$. P_j ($j=1,2,3$) zijn de door α bepaalde takken, $\alpha_j \in P_j$ gebonden aan α , en $\beta \in P_1$. Dan is $\varphi(P_j, \alpha_j) \leq 1$ en (volgens 14, of voor $\beta = \alpha_1$ volgens 13) $\varphi(P_1, \alpha_1) \leq \frac{1}{2}$, dus

$$\varphi(P, \alpha) \leq 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = 0,$$

hetgeen volgens 2B niet mag.

(16) Geen $P \in \mathcal{P}$ met meer dan twee elementen bezit een 3-voudig gebonden paar.

Het is voldoende, dit te bewijzen voor een systeem $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ met drievoudige binding tussen α en β en binding tussen β en γ . Volgens 10 is

$$\varphi(P, \beta) \leq 1 - \frac{3}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = 0.$$

(17) Heeft $P \in \mathcal{P}$ een dubbele binding, dan is $\varphi(P, \gamma) \leq \frac{1}{2}$ voor alle $\gamma \in P$.

Volgens 12 behoeven we dit alleen voor systemen $\{\alpha, \beta\}$ met dubbele binding te bewijzen. Volgens 10 is

$$\varphi(P, \beta) \leq 1 - \frac{2}{4 \cdot 1} \leq \frac{1}{2}.$$

(18) Geen $P \in \mathcal{P}$ bezit een driezijdig element en een dubbele binding.

Bewijs: Zij $\alpha \in P$ driezijdig en zij tussen β en γ een dubbele binding,

P' een door γ bepaalde tak, zodat $\alpha, \beta \in P'$. Is $\alpha \neq \beta$, dan is α driezijdig in P' , dus volgens 14: $\varphi(P', \beta) \leq \frac{1}{2}$. Is $\alpha = \beta$, dan volgt hetzelfde uit 13. Volgens 10 is

$$\varphi(P' \cup (\gamma), \gamma) \leq 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 0.$$

(19) Geen $P \in \mathcal{P}$ heeft meer dan één dubbele binding.

Bewijs: Laat α met β en γ met δ dubbel zijn gebonden. Zij P' een door δ bepaalde tak en $\alpha, \beta, \gamma \in P'$. Volgens 17 is $\varphi(P', \gamma) \leq \frac{1}{2}$, dus volgens 10:

$$\varphi(P' \cup (\delta), \delta) \leq 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 0.$$

(20) Een $P \in \mathcal{P}$ met dubbele binding bezit volgens 18 een lineair geordende graaf. Heeft P meer dan vier elementen, dan kan de dubbele binding alleen in het begin (of op het eind) staan.

Want zij $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ met binding tussen α_j en α_{j+1} en dubbele tussen α_2 en α_3 . Zij $P_j = \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$.

$$\varphi(P_2, \alpha_2) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

$$\varphi(P_3, \alpha_3) = 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{3},$$

$$\varphi(P_4, \alpha_4) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{4},$$

$$\varphi(P_5, \alpha_5) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 0.$$

(21) Zij $K_q \in \mathcal{P}$ het systeem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ met enkelvoudige bindingen tussen α_j en α_{j+1} . Dan is

$$\varphi(K_q, \alpha_q) = \frac{q+1}{2q}.$$

Duidelijk voor $q=1$. Inductie:

$$\varphi(K_{q+1}, \alpha_{q+1}) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{q+1}{2q}} = \frac{q+2}{2(q+1)}.$$

(22) Zij $P \in \mathcal{P}$ en $\delta \in P$ driezijdig. De door δ bepaalde takken moeten wegens 15 en 18 van de vorm K_p, K_q, K_r (zie 21) zijn. Dus

$$\varphi(P, \delta) = 1 - \frac{p}{2p+1} - \frac{r}{2r+1}.$$

Bij de uitdrukking $y = \frac{x}{2(x+1)}$ hoort de functietafel

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$y = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \dots \text{ monotoon.}$$

$$-2 \frac{(\rho_1, \rho_2)}{(\rho_1, \rho_1)} = 3$$

is er een ρ_1 -ladder ter lengte 3 door ρ_1 , dus we krijgen de wortelvormen

$$\rho_2 + \rho_1, \rho_2 + 2\rho_1, \rho_2 + 3\rho_1.$$

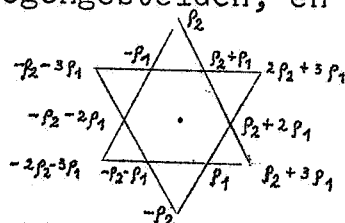
Dan is er wegens

$$-2 \frac{(\rho_2 + 3\rho_1, \rho_2)}{(\rho_2, \rho_2)} = 1$$

nog een wortelvorm

$$2\rho_2 + 3\rho_1.$$

Bovendien zijn er de tegengestelden, en dubbeltellend de wortelvorm 0. Dus $\dim \mathcal{C}_2 = 14$.



$$\left. \begin{array}{ll} \text{We hebben 1 } \rho_1\text{-ladder ter lengte 2} \\ 2 \quad \quad \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3 \\ 1 \quad \rho_2\text{-ladder} \quad \quad \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2 \\ 4 \quad \quad \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N_{\rho_1} = 12(\rho_1, \rho_1) \\ N_{\rho_2} = 4(\rho_2, \rho_2) \end{array}.$$

De proportionaliteitsfactor van daarstraks is dus $\frac{1}{12}$. We hebben de formule uit 43

$$N_{\lambda} = \sum_{\lambda\text{-ladders}} \frac{p(p+1)(p+2)}{12}$$

gebruikt. Om de $N_{\alpha, \beta}$ te berekenen, gebruiken we uit 49

$$N_{\alpha, \beta} = \sqrt{-\frac{1}{2} k k'(\alpha, \alpha)},$$

waar β het k -de element van onderen in zijn α -ladder is, en er k' naar boven op volgen. Dit levert op

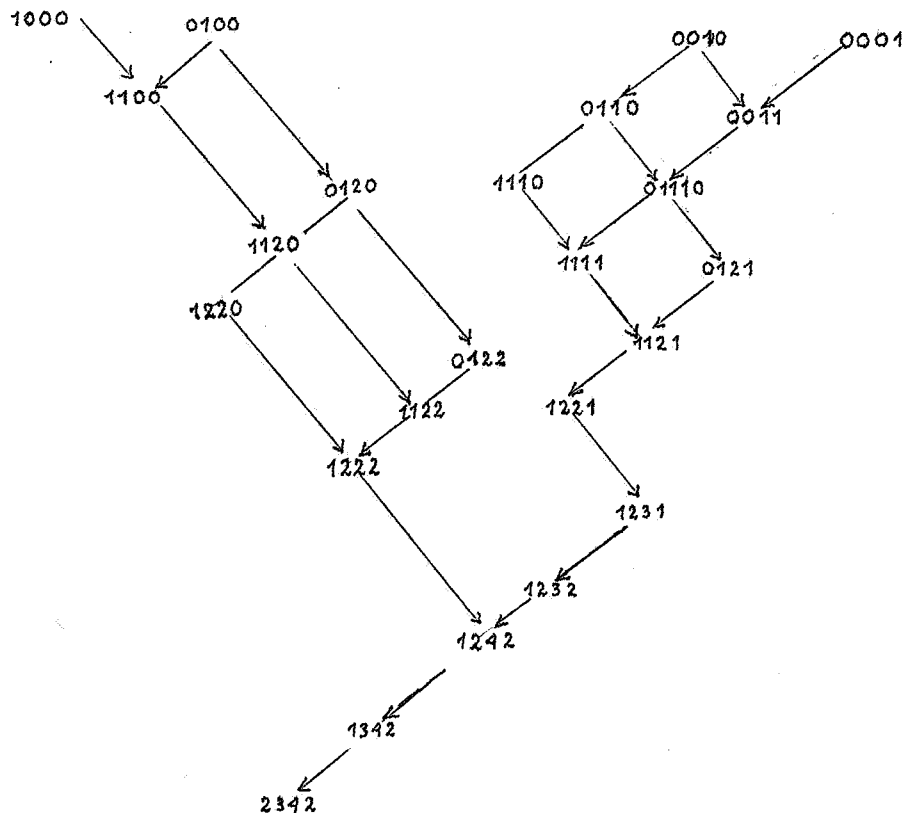
$$\begin{aligned} N_{\rho_2, \rho_1} &= \varepsilon_1 \sqrt{-\frac{1}{8}}, & N_{\rho_1, \rho_1 + \rho_2} &= \varepsilon_2 \sqrt{-\frac{1}{6}}, & N_{\rho_1, 2\rho_1 + \rho_2} &= \\ & & & & &= \varepsilon_3 \sqrt{-\frac{1}{8}}, \\ N_{\rho_2, 3\rho_1 + \rho_2} &= \varepsilon_4 \sqrt{-\frac{1}{8}}, & N_{\rho_1 + \rho_2, 2\rho_1 + \rho_2} &= \varepsilon_5 \sqrt{-\frac{1}{8}}, \end{aligned}$$

waarbij Jacobi de relatie

$$\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 = 0$$

oplevert (indien de vierkantswortels niet positief imaginair deel zijn genomen). Door deze $N_{\alpha, \beta}$ zijn de andere bepaald (Jacobi).

Dezelfde methode zou voor de andere exceptionele Lie-algebra's heel onhandig zijn. (Wel levert ze de existentie op.) We laten nog even zien hoe systematisch toepassen der methode van 55 de 24 positieve wortelvormen van de F_4 oplevert:



De primitieve wortelvormen zijn gerangschikt zoals in de graaph. Dus b.v. 2342 betekent de wortelvorm $2\rho_2 + 3\rho_4 + 4\rho_3 + 2\rho_1$.

59. a. Het valt op, dat de hoogste wortelvorm de overige in alle "coördinaten" overtreft. Dit geldt algemener:

Zij Γ enkelvoudig en halfenkelvoudig. Dan geldt voor de hoogste wortelvorm $\alpha = \sum a_i \rho_i$, vergeleken met alle overige $\beta = \sum b_i \rho_i \in W$; $a_i \geq b_i$ voor alle i ($\rho_i \in P$).

Stel namelijk, voor zekere β was dit niet zo. We kunnen β zo kiezen, dat voor geen positieve wortelvorm γ geldt: $\beta + \gamma \in W$. Wegens de maximaliteit van α is $\alpha + \beta \in W$; maar ook $\alpha - \beta \notin W$, omdat dit een wortelvorm zou zijn met positieve en negatieve coëfficiënten bij de ρ_i . Dus $(\alpha, \beta) = 0$.

$$\sum b_i (\alpha, \rho_i) = 0.$$

Wegens de maximaliteit van α is

$$(\alpha, \rho_i) \geq 0.$$

Dus: uit $b_i \neq 0$ volgt $(\alpha, \rho_i) = 0$.

Wegens $\alpha \neq 0$ is er een i met $(\alpha, \rho_i) \neq 0$, dus met $b_i = 0$. Daar de graaf van Γ samenhangt, is er dus ook een $\rho \in P$ met een buur $\sigma \in P$ zodat ρ niet en σ wel in β optreedt. Maar dan is $(\beta, \rho) < 0$, dus $\beta + \rho \in W$ in strijd met de veronderstelling.

De hoogste wortelvormen zijn onderscheidenlijk:

$$\alpha_1 : \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{l-1} + \rho_l$$

$$\mathcal{L}_1 : 2\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + \dots + 2\rho_{l-1} + 2\rho_l$$

$$\mathcal{L}_1 : 2\rho_1 + 2\rho_2 + \dots + 2\rho_{l-1} + \rho_l$$

$$\mathcal{P}_1 : \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4 + \dots + 2\rho_l$$

$$\mathcal{Q}_2 : 3\rho_1 + 2\rho_2$$

$$\mathcal{F}_4 : 2\rho_1 + 2\rho_2 + 4\rho_3 + 3\rho_4$$

$$\mathcal{E}_6 : \rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4 + 2\rho_5 + 3\rho_6$$

$$\mathcal{E}_7 : 2\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + 2\rho_4 + 3\rho_5 + 3\rho_6 + 4\rho_7$$

$$\mathcal{E}_8 : 2\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + 3\rho_4 + 4\rho_5 + 4\rho_6 + 5\rho_7 + 6\rho_8.$$

60. Topologisch intermezzo

Voorlopig zij G een boogsgewijs samenhangende ruimte. Verderop (vanaf eind van (3)) wordt ook verondersteld, dat in G elk punt willekeurig kleine enkelvoudig samenhangende omgevingen bezit (definitie later).

(1) $\mathcal{M}$ zij de verzameling van alle wegen in G , d.w.z. van de continue afbeeldingen in G van het segment $0 \leq \tau \leq 1$.

Voor $w, w' \in \mathcal{M}$ met $w(1) = w'(0)$ wordt $w'' = w \circ w' \in \mathcal{M}$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned} w''(\tau) &= w(2\tau) \text{ voor } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ &= w'(2\tau-1) \text{ voor } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1. \end{aligned}$$

Voor $A, B \subset G$ zij $\mathcal{M}_{A,B}$ de verzameling der wegen w met

$$w(0) \in A, w(1) \in B.$$

Meestal zal A of (en) B uit een enkel punt a resp. b zijn en dan in $\mathcal{M}_{A,B}$ hierdoor worden aangeduid.

Twee wegen w_0, w_1 heten (A, B) -homotoop, als er een schaar w_σ ($0 \leq \sigma \leq 1$) van wegen bestaat met

$$w_\sigma \in \mathcal{M}_A^B,$$

en zodat

$$w_\sigma(\tau) \text{ continu in } \sigma, \tau$$

is. Het homotopiebegrip heeft alle eigenschappen van een equivalentierelatie.

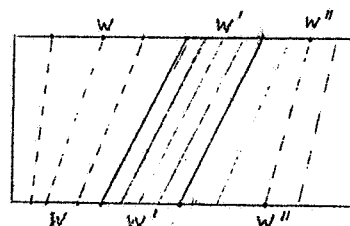
Twee wegen w_0, w_1 heten homotoop zonder meer, als $w_0(0)=w_1(0)=a$, $w_0(1)=w_1(1)=b$ en als ze (a, b) -homotoop zijn. De homotopieklasse van w wordt $[w]$ genoemd. De verzameling van alle homotopieklassen heet $[\mathcal{M}]$.

Uit w_0 homotoop w_1 en w'_0 homotoop w'_1 volgt (voor zover gedefinieerd): $w_0 \circ w'_0$ homotoop $w_1 \circ w'_1$. Derhalve is voor sommige paren in $\mathcal{M}$ een product gedefinieerd:

$$[w] \circ [w'] = [w \circ w'] .$$

Voor dit product geldt: associativiteit, unieke existentie van links-één en rechts-één (voor elk element afzonderlijk), unieke existentie van inverse. Als voorbeeld bewijzen we de associativiteit. Zie tekening - elke niet-horizontale lijn wordt in één punt afgebeeld; de horizontale lijnstukken worden afgebeeld volgens de functies, die erbij zijn vermeld:

$$\begin{aligned} w'''_\sigma(\tau) &= w(4\tau/\sigma+1) \text{ voor } 0 \leq 4\tau \leq \sigma+1, \\ &= w'(4\tau-\sigma-1) \text{ voor } \sigma+1 \leq 4\tau \leq \sigma+2, \\ &= w''(4\tau-\sigma-2/2-\sigma) \text{ voor } \sigma+2 \leq 4\tau \leq 4. \end{aligned}$$



Dan is $w'''_0 = (w \circ w') \circ w''$,

$$w'''_1 = w \circ (w' \circ w''),$$

dus inderdaad w'''_0 homotoop w'''_1 .

$[\mathcal{M}]$ is een "groepoïde".

(2) De $[w] \in [\mathcal{M}]$ met $w \in \mathcal{M}_p^p$ vormen zelfs een groep $\mathcal{O}_p$. Voor diverse p, q zijn $\mathcal{O}_p$ en $\mathcal{O}_q$ isomorf door middel van een f , die als volgt is gedefinieerd: men kiese een vaste $u \in \mathcal{M}_p^q$ en stelle

$$f[w] = [u]^{-1} \circ [w] \circ [u] .$$

We spreken ook van $\mathcal{O}$ zonder meer. $\mathcal{O}$ heet de fundamenteaalgroep van G . Bestaat $\mathcal{O}$ alleen uit de één, dat heet G enkelvoudig samen-

hangend. Elke weg w met $w(0)=w(1)=p$ is dan homotoop met de constante weg ($w(\tau)$ identiek $=p$). Twee wegen w_0 en w_1 met $w_0(0)=w_1(0)$ en $w_0(1)=w_1(1)$ zijn dan steeds homotoop.

(3) $[\partial M_p]$ zij de verzameling van alle $[w] \in [M]$ met $w \in M_p^G$. We topologiseren $[\partial M_p]$ en noemen het dan de universele ontrolling van G .

$\pi[w] = w(1)$ definieert de "projectie" van $[\partial M_p]$ op G .

Zij U een boogsgewijs samenhangende open verzameling van G en K een maximale verzameling van onderling (p,U) -homotope wegen. De verzameling van alle $[w] \in K$ heet dan een blad boven U . Onder een open verzameling in $[\partial M_p]$ verstaan we een vereniging van bladen. (Men ga na, dat dit een topologische ruimte is).

De projectie van elk blad boven U is U . Is U enkelvoudig samenhangend, dan is π op elk blad boven U topologisch. De hoofdzaak is, om aan te tonen, dat π 1-1 is:

Zij $[w_0]$ en $[w_1]$ in hetzelfde blad boven U en $\pi[w_0] = \pi[w_1]$. Dan is dus

$$w_0(0) = w_1(0) = p,$$

$$w_0(1) = w_1(1) = q,$$

en er is een schaar w_σ ($0 \leq \tau \leq 1$) met $w_\sigma(\tau)$ continu in σ en τ samen en

$$w_\sigma(0) = p, w_\sigma(1) \in U.$$

$w_\sigma(1)$ als functie van σ is een weg in U met $w_0(1)=w_1(1)=q$, dus homotoop met de constante weg $u(=q)$. Er is dus een $w_\sigma(\tau)$ ($1 \leq \tau \leq 2$), continu in σ, τ samen, met

$$w_\sigma(2) = q,$$

$$w_0(\tau) = w_1(\tau) = q \quad (1 \leq \tau \leq 2).$$

Stel

$$w'_\sigma(\tau) = w_\sigma(2\tau) \text{ voor } 0 \leq \tau \leq 1.$$

w'_0 en w'_1 zijn homotoop. $w'_0 = w_0 \circ u$, $w'_1 = w_1 \circ u$. Dus zijn ook w_0 en w_1 homotoop. Dus is π hier 1-1.

Merk nog op, dat elk punt in G willekeurig kleine omgevingen bezit, die projectie van bladen zijn.

(4) $[\partial M_p]$ is enkelvoudig samenhangend ("samenhangend" is evident).

Bewijs: "We nemen een weg z in $[\partial M_p]$ met $z(0)=z(1)$. Voor $z(0)=z(1)$ mogen we $[u]$ nemen, waar $u \in M$ de constante weg ($=p$) is. Omdat de verzameling der $z(\sigma)$ compact is, kan ze worden overdekt met eindig veel open verzamelingen, waarvan elke een blad is boven zekere enkel-

voudig samenhangende U . Er zijn dus $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k = 1$, zo dat

voor $\sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i : z(\sigma) \in$ blad boven zekere U_i

(U_i enkelvoudig samenhangend).

$$z(\sigma_i) = [w_{\sigma_i}].$$

Omdat $z(\sigma_{i-1}), z(\sigma_i)$ in hetzelfde blad boven U_i zijn, is

$$w_{\sigma_{i-1}} \quad (p, U_i)\text{-homotoop met } w_{\sigma_i}.$$

Dus is er $w_\sigma \in \mathcal{M}_p^{U_i}$ met

$$w_\sigma(\tau) \text{ continu in } \sigma, \tau \quad (\sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i).$$

Stel

$$z'(\sigma) = [w_\sigma] \quad \text{voor } 0 \leq \sigma \leq 1.$$

$$z(\sigma_{i-1}) = z'(\sigma_{i-1}), \quad z(\sigma_i) = z'(\sigma_i).$$

z en z' zijn producten van stukwegen z_i resp. z'_i beantwoordende aan $\sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i$. z_i en z'_i lopen in hetzelfde blad boven U_i ; dit blad is homeomorf met U_i , dus enkelvoudig samenhangend. Dus zijn z_i en z'_i homotoop, dus ook z en z' . We behoeven dus alleen nog aan te tonen, dat z' homotoop is met de constante weg (constant = $[u]$).

We stellen

$$z'_\mu(\sigma) = [w_\sigma((1-\mu)\tau)] \quad \text{voor } 0 \leq \mu \leq 1.$$

Dit definieert een schaar wegen z'_μ in $[\mathcal{M}_p]$ met

$$\begin{aligned} z'_0 &= z', \\ z'_1(\sigma) &= [w_\sigma(0)] \text{ identiek} = [u], \\ z'_\mu(0) &= [w_0((1-\mu)\tau)] = z(0) = [u], \\ z'_\mu(1) &= [w_1((1-\mu)\tau)] = z(1) = [u]. \end{aligned}$$

Hiermee is het gewenste aangetoond.

(5) De fundamenteaalgroep ϕ_p van G werkt als transformatiegroep in $[\mathcal{M}_p]$ door middel van linksvermenigvuldiging,

$$[w] \rightarrow [v] \cdot [w] \quad (v \in \mathcal{M}_p^p, w \in \mathcal{M}_p^G).$$

Een blad boven zekere U wordt hierbij in een blad boven dezelfde U afgebeeld. De afbeelding is continu. Voorelk paar punten $[w], [w']$ van $[\mathcal{M}_p]$ met dezelfde projectie is er een element der fundamenteaalgroep, dat het een in het ander afbeeldt, te weten $[w'] \cdot [w]^{-1}$.

Zij $\emptyset'$ ondergroep van $\emptyset$. Door voor elke $[w]$ alle elementen van $\emptyset' [w]$ onderling te identificeren, verkrijgt men de $\emptyset'$ -ontrolling van G . De universele ontrolling is 1-ontrolling, R zelf is zijn $\emptyset$ -ontrolling. Voor de $\emptyset'$ -ontrolling worden begrippen als projectie en blad boven U op voor de hand liggende wijze gedefinieerd. De projectie is dan ook weer 1-1 in een blad boven enkelvoudig samenhangende U .

Zij G' een hoogsgewijs samenhangende, in het klein enkelvoudig samenhangende topologische ruimte en λ een afbeelding van G' op G , die in een voldoende kleine omgeving van elk gewenst punt van G' een homeomorfie is. Zij $\lambda p' = p$. De λ -beelden van de zojuist genoemde omgevingen overdekken dus G . Bij elke weg $w \in \partial M$ is er een eindig aantal, die de verzameling der $w(\tau)$ al overdekken. Er zijn dus $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = 1$, zodat de verzameling van de $w(\tau)$ ($\tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i$) in zo'n omgeving ligt. Is het λ -origineel $w'(\tau_{i-1})$ van $w(\tau_{i-1})$ bepaald, dan is dus voor alle τ met $\tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i$ het λ -origineel $w'(\tau)$ van $w(\tau)$ ondubbelzinnig bepaald door de eis dat $w'(\tau)$ continu van τ afhangt. Dus is ook voor elke $w \in \partial M_p$ het λ -origineel w' als weg in G' met $w'(0) = p'$ ondubbelzinnig bepaald.

Analoog beredeneert men, dat hierbij aan homotopie w in G homotopie w' in G' beantwoorden. Deze 1-1-relatie tussen de ontrollingen van G en G' is uiteraard een homeomorfie. G' ontstaat uit deze ontrolling door projectie, is dus een zekere $\emptyset'$ -ontrolling van G .

(6) G zij nu tevens groep en wel topologische groep. Dan is ook de universele ontrolling van G als topologische groep op te vatten. Stel namelijk $p = \text{groep-één}$, en voor $w, w' \in \partial M_p$

$$w''(\tau) = w(\tau)w'(\tau).$$

Dan is

$$w'' = ww' \in \partial M_p.$$

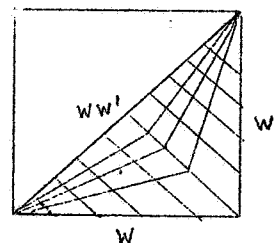
Is w_0 homotoop w_1 door middel van een schaar w_ϵ , evenzo w'_0 homotoop w'_1 door middel van w'_ϵ , dan is $w_0 w'_0$ homotoop $w_1 w'_1$ door middel van de schaar $w_\epsilon w'_\epsilon$. Dus is zelfs een vermenigvuldiging in $[\partial M_p]$ gedefinieerd:

$$[w][w'] = [ww'] .$$

Het is duidelijk, dat we een topologische groep krijgen.

π is nu een homomorfisme, omdat $\pi[ww'] = (ww')(1) = w(1)w'(1) = \pi[w] \cdot \pi[w']$ is. De kern ervan bestaat uit de $[w]$ met $\pi[w] = w(1) = \text{groep-één}$, dus uit alle elementen van $\emptyset_p$. Hij is zelfs (groeptheore-

tisch) isomorf met $\emptyset_p$. Zie tekening - men denke zich een punt van het vierkant met coördinaten (α, β) afgebeeld op $w(\alpha)w'(\beta)$, dus de horizontale lijn volgens w , de verticale volgens w' , de twee aan elkaar gezet volgens $w \circ w'$, de diagonaal volgens ww' ; de schaar w''_G wordt zo gedefinieerd, dat de lijnen $\tau = \text{const.}$ van $w''_G(\tau)$ evenwijdig met de andere diagonaal zijn, de lijnen $\sigma = \text{const.}$ zijn de gebroken lijnen van links onderen naar rechts boven; w''_0 is $w \circ w'$, w''_1 is ww' . In formules:



$$w''_G(\tau) = w((2-\sigma)\tau)w'(\sigma\tau) \quad \text{voor } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2},$$

$$= w(1-\sigma+\sigma\tau)w'(\sigma-\sigma\tau+2\tau-1) \quad \text{voor } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1.$$

Breidt men deze afbeelding analoog in de andere helft van de figuur uit, dan blijkt $w \circ w'$ homotoop $w' \circ w$. Dus $\emptyset$ commutatief. Maar we kunnen nog meer bewijzen:

G is homomorf beeld bij π van zijn universele ontrolling G' , naar we zagen. De kern van het homomorfisme is een discrete groep $\emptyset$. Zij algemeen een continu homomorfisme van een samenhangende topologische groep G' en een dergelijke, G , gegeven, met discrete kern H . Dan is H normaaldeeler, dus $axa^{-1} \in H$ voor $x \in H$. Nu is axa^{-1} continu in a , maar H discreet, dus axa^{-1} constant, dus $axa^{-1} = x$ voor $x \in H$, dus H in het centrum. Speciaal is de fundamentealgroep van G in het centrum van de universele ontrolling van G . Is een groep G' gegeven en H een discrete ondergroep van het centrum van G' , dan is G' een ontrolling van G/H .

Stelling: De fundamentealgroep van een lokaal enkelvoudig samenhangende en globaal boogsgewijs samenhangende groep G is commutatief en ligt in het centrum van de universele ontrolling van G .

(7) G en zijn universele ontrolling zijn in zekere omgeving van de groep-één topologisch isomorf. We tonen aan:

Stelling: Samenhangende en lokaal enkelvoudig samenhangende groepen, die in zekere éénomgeving topologisch isomorf zijn hebben wezenlijk dezelfde universele ontrollingsgroep.

Het is voldoende, te bewijzen, dat G en G' , indien ook globaal enkelvoudig samenhangend, topologisch isomorf zijn.

G en G' zijn isomorf verondersteld in een omgeving $U \subset G$ van de groep-één, we mogen U als enkelvoudig samenhangend aannemen. Door de

isomorfie f is U op U' afgebeeld. We bepalen (op grond van de continuïteit van de groepoperaties) een éénomgeving V zo dat $VV \subset U$.

Zij w een weg in G . De verzameling M_δ van alle $w(\tau)w(\tau')^{-1}$ met $|\tau - \tau'| \leq \delta$ is compact. $\bigcap_{\delta > 0} M_\delta =$ groep één. Dus voor zekere $\delta > 0$ is $M_\delta \subset V$, dus

$$w(\tau)w(\tau^*)^{-1} \in V \text{ voor } |\tau - \tau^*| \leq \delta.$$

Kies $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = 1$ met $|\tau_i - \tau_{i-1}| < \frac{1}{2}\delta$.

Bepaal nu een weg w' in G' stapsgewijs, nadat $w'(0)$ voorgeschreven is, als volgt:

$$\text{voor } \tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i \text{ stel } w'(\tau) = f(w(\tau)w(\tau_{i-1})^{-1}) \cdot w'(\tau_{i-1}).$$

Merk op, dat $w(\tau)w(\tau_{i-1})^{-1} \in V$, dus f zinvol en dat $w'(\tau_{i-1})$ in de voorafgaande stap bepaald is. Zij $\varepsilon = \min_i (\tau_i - \tau_{i-1})$. Voor $0 \leq \tau - \tau^* < \varepsilon$ is er dan een i zodat $\tau_{i-1} < \tau \leq \tau^* < \tau_{i+1}$.

$$w(\tau)w(\tau^*)^{-1} = w(\tau)w(\tau_i)^{-1} \cdot w(\tau_i)w(\tau^*)^{-1} \in V \cdot V \subset U.$$

Dus: bij gegeven weg w in G en gegeven $w'(0)$ in G' hoort een weg w' in G' zo dat voor zekere $\varepsilon > 0$ en alle τ, τ^* met $0 \leq \tau, \tau^* \leq 1$ en $|\tau^* - \tau| < \varepsilon$ geldt:

$$w'(\tau)w'(\tau^*)^{-1} = f(w(\tau)w(\tau^*)^{-1}).$$

Men gaat gemakkelijk na, dat w' door deze gegevens ondubbelzinnig bepaald is. - We duiden die w' ook aan door $\Theta(w; a')$ als a' de gegeven waarde van $w'(0)$ is.

Speciaal hoort op deze wijze bij elke weg w in G met $w(0) =$ groep één één weg w' in G met $w'(0) =$ groep één, die we ook Θw noemen.

We tonen nu aan: Voor $v(0) = w(0) =$ groep één is $\Theta(vw) = \Theta v \cdot \Theta w$:

Allereerst bepalen we de één-omgevingen V_1, V_2 zo dat

$$V_1 V_1 V_1 \subset V, \quad V_1^{-1} \subset V, \\ v(\sigma) V_2 v(\sigma)^{-1} \subset V_1$$

is. We bewijzen dan: als $c \in V_2$, dan

$$f(v(\sigma)c v(\sigma)^{-1}) = v'(\sigma)f(c)v'(\sigma)^{-1} \quad (*)$$

voor $v' = \Theta v$. De verzameling Σ van de σ waarvoor de vergelijking klopt, is afgesloten en bevat $\sigma = 0$. We behoeven alleen te bewijzen, dat Σ tevens open is (t.a.v. $0 \leq \sigma \leq 1$).

Zij $\sigma_0 \in \Sigma$ en σ zo dicht bij σ_0 , dat $v(\sigma)v(\sigma_0)^{-1} \in V_1$ is. Dan zijn in

$$v(\sigma)c v(\sigma)^{-1} = v(\sigma)v(\sigma_0)^{-1} \cdot v(\sigma_0)c v(\sigma_0)^{-1} \cdot v(\sigma_0)v(\sigma)^{-1}$$

de drie factoren rechts in V_1 , dus

$$\begin{aligned} f(v(\sigma)c v(\sigma)^{-1}) &= f(v(\sigma)v(\sigma_0)^{-1}) \cdot f(v(\sigma_0)c v(\sigma_0)^{-1}) \cdot f(v(\sigma_0)v(\sigma)^{-1})^{-1} \\ &= v'(\sigma)v'(\sigma_0)^{-1} \cdot v(\sigma_0)c v'(\sigma_0)^{-1} \cdot v'(\sigma_0)v'(\sigma) \end{aligned}$$

gezien de definitie-eigenschap van v' en de veronderstelling t.a.v. σ_0 . Hiermee is $\sigma \in \Sigma$ bewezen en dus de geldigheid van (*) voor $0 \leq \tau \leq 1$.

We schrijven nu

$$(v(\tau)w(\tau))(v(\tau^*)w(\tau^*))^{-1} = v(\tau)(w(\tau)w(\tau^*)^{-1})v(\tau)^{-1} \cdot v(\tau)v(\tau^*)^{-1}.$$

Zijn $|\tau - \tau^*|$ zo klein, dat $w(\tau)w(\tau^*)^{-1} \in V_2$ en $v(\tau)v(\tau^*)^{-1} \in V_1$ is.

Dan kunnen we (*) op de eerste factor rechts toepassen met $c = w(\tau)w(\tau^*)^{-1}$. Aangezien beide factoren rechts in V_1 zijn, hebben we

$$\begin{aligned} f((v(\tau)w(\tau))(v(\tau^*)w(\tau^*))^{-1}) &= v'(\tau)(w'(\tau)w'(\tau^*)^{-1}v'(\tau)^{-1} \cdot v'(\tau)v'(\tau^*)^{-1})^{-1} \\ &= (v'(\tau)w'(\tau))(v(\tau^*)w(\tau^*))^{-1}, \end{aligned}$$

hetgeen betekent, dat

$$\theta(vw) = \theta v \cdot \theta w$$

is.

Verder blijkt

$$\theta v^{-1} = (\theta v)^{-1},$$

als men (*) toepast op

$$v(\tau^*)^{-1} \cdot v(\tau)v(\tau^*)^{-1} \cdot v(\tau^*).$$

Het is onze bedoeling, de definitie van f zo uit te breiden, dat

$$fa = (\theta w)(1),$$

indien w zo gekozen wordt, dat

$$w(0) = \text{één}, \quad a = w(1)$$

is. We hoeven alleen te bewijzen, dat deze definitie eenduidig is, d.w.z. dat voor

$$v(0) = w(0) \text{ één}, \quad v(1) = w(1)$$

ook geldt

$$(\theta v)1 = (\theta w)1.$$

Volgens het zo juist bewezene komt dit erop neer aan te tonen, dat uit

$$w(0) = w(1) = \text{groep-\'e\'en}$$

volgt

$$(\theta w)1 = \text{groep-\'e\'en}.$$

Zij dus w gegeven met $w(0) = w(1) = \text{groep \'e\'en}$. Volgens veronderstelling is G enkelvoudig samenhangend, dus is er een schaar w_σ ($0 \leq \sigma \leq 1$) met $w_\sigma(\tau)$ continu in σ, τ en $w_\sigma(0) = w_\sigma(1) = w_1(\tau) = \text{groep-\'e\'en}$. We bepalen $0 \leq \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k = 1$ zo, dat

$$v_i(\tau) = w_{\sigma_{i-1}}(\tau) w_{\sigma_i}(\tau) \in U.$$

Dan is

$$w = v_1 v_2 \dots v_k,$$

dus ook

$$\theta w = \theta v_1 \cdot \theta v_2 \dots \theta v_k,$$

Daar v_i in U verloopt is

$$(\theta v_i)(\tau) = f v_i(\tau),$$

dus voor $\tau=1$

$$(\theta v_i)(1) = \text{groep-\'e\'en}.$$

dus

$$(\theta w)(1) = \text{groep \'e\'en},$$

hetgeen we moesten bewijzen.

Dat de zojuist ondubbelzinnig gedefinieerde f een continu homomorfisme is, is duidelijk. Evenzo, op grond van de gelijkwaardige rol van G en G' , dat het zelfs een topologisch isomorfisme is.

61. Zij Γ Lie-algebra zonder niet-triviaal centrum (d.w.z. $[X, \Gamma] = 0 \rightarrow X=0$). Dan is de door Γ voortgebrachte Lie-groep G_1 ook zonder niet-triviaal centrum. We weten al dat G_1 in het klein isomorf is met $\tilde{G}$; de bewering is, dat die isomorfie globaal geldt.

Bewijs: Γ bezit de voorstellingen φ en ψ resp. in Γ en $\tilde{\Gamma}$, gedefinieerd door

$$\varphi(A)X = [A, X], \quad \psi(A)X = [\tilde{A}, \tilde{X}].$$

Deze voorstellingen zijn equivalent door middel van θ met

$$\begin{aligned} \theta X &= \tilde{X}; \\ \psi &= \theta \varphi \theta^{-1}. \end{aligned}$$

Definiëren we $\psi(a)$ voor $a \in G_1$ door

$$\psi(a) = a\chi a^{-1},$$

dan is $\psi(r)$ de infinitesimaal-algebra van $\psi(G_1)$. Verder is $\tilde{r} = \psi(r)$ die van G_1 . Dus is

$$\psi(a) = \theta a \theta^{-1}. \quad (2)$$

Behoort a tot het centrum van G_1 , dan is $\psi(a)=1$ volgens (1), dus $a=1$ volgens (2), hetgeen beweerde was.

62. Is G de unitaire beperking voor een halfenkelvoudige Lie-groep, dan is $\tilde{G}$ compact. (Later wordt aangetoond, dat G zelf compact is.)

Bewijs: Daar $\tilde{G}$ de negatief definitieve Killing-Cartan-vorm invariant laat, zijn de matrix-coëfficiënten beperkt. De afsluiting K van $\tilde{G}$ is dus zeker compact. K is Lie-groep.

Zij $\tilde{r}$ de Lie-algebra van $\tilde{G}$.

Zij $a \in K$, $a = \lim a_n$, $a_n \in \tilde{G}$. Dan is $a_n \tilde{r} a_n^{-1} = \tilde{r}$, dus ook $a \tilde{r} a^{-1} = \tilde{r}$, dus $a \tilde{G} a^{-1} = \tilde{G}$, dus $\tilde{G}$ normaaldeleer in K . Volgens 37 (einde) zijn $\tilde{G}$ en $\tilde{K}$ in het klein identiek. Daar $\tilde{K}$ samenhangt, zijn ze in 't geheel identiek. Dus is $\tilde{G}$ compact.

63. G is voorlopig een unitair beperkte geadjungeerde halfenkelvoudige Lie-groep; we gebruiken de letter θ thans ook voor de unitair beperkte stam (i.p.v. $i\theta_u$). Op de gebruikelijke basis (een basis van θ plus de takken E_α) bestaat θ uit zuiver imaginaire diagonaalmatrices H met als matrixelementen de wortelvormen $\alpha(H)$; $h = e^H$ heeft overeenkomstig de matrixelementen $e^{\alpha(H)}$. Als coördinaten $\Lambda(h)$ van $h = e^H \in e^\theta$ kunnen we de matrixelementen $e^{\rho(H)}$ van h gebruiken, waar ρ de primitieve wortelvormen doorloopt; alle overige matrixelementen van h zijn immers producten van diverse $\Lambda(h)$. Elke $\Lambda(h)$ doorloopt de eenheidscirkel. Derhalve is e^θ een compacte groep, namelijk het directe product van 1 oirkeldraaigroepen. We noemen e^θ ook de stam van G .

In θ beschouwen we de deelverzameling D gedefinieerd door

$$0 < I\alpha < 2\pi \text{ voor elke positieve wortelvorm.}$$

Voor $h \in e^D$ verstaan we onder $\log h$ het ondubbelzinnig gedefinieerde $H \in D$ met $h = e^H$.

D is convex. Onder kortste weg van een punt van D naar een ander verstaan we het eenparig doorlopen lijnstuk tussen hen. Dezelfde

terminologie brengen we door $H \rightarrow e^H$ op e^D over.

64. Op een geschikte orthonormale basis bezit, naar men weet, elke orthogonale (unitaire) afbeelding de diagonaalkvorm. Iets dergelijks bewijzen we voor de unitair beperkte halfenkelvoudige Lie-griepen (voorlopig alleen voor de geadjungeerde voorstellingen):

Stelling: Elk element van een unitair beperkte geadjungeerde halfenkelvoudige Liegroep is geconjugeerd met een van de stam, en zelfs met een van e^D . Twee stammen zijn onderling geconjugeerd.

(Voor andere reële typen en voor de complexe groep is dit niet waar; denk aan de elementaire delers. Wel zijn in het complex geval nog alle stammen onderling geconjugeerd, maar niet elk element behoort tot een stam te behoren.)

Bewijs: We beelden een omgeving van de 0 in Γ af in G door γ :

$$\gamma(H + \sum \tau_\alpha E_\alpha) = h_0^{-1} \cdot e^{\sum \tau_\alpha E_\alpha} h_0 e^{H_0} e^{-\sum \tau_\alpha E_\alpha},$$

waarbij $h_0 = e^{H_0}$ vast, $H_0, H \in \theta$, E_α de α -tak is.

$$\begin{aligned} \gamma(H + \sum \tau_\alpha E_\alpha) &= 1 + H + h_0^{-1} [\sum \tau_\alpha E_\alpha, h_0] + \dots \\ &= 1 + H + (h_0^{-1} \sum \tau_\alpha E_\alpha h_0 - \sum \tau_\alpha E_\alpha) + \dots \\ &= 1 + H + (e^{-H_0} - 1) \sum \tau_\alpha E_\alpha + \dots \\ &= 1 + H + \sum (e^{-\alpha(H_0)} - 1) \tau_\alpha E_\alpha + \dots \end{aligned}$$

Kiezen we in Γ de gebruikelijke basis en in G het hieraan beantwoordende kanonieke coördinatensysteem, dan blijkt de functionaaldeterminant van γ in 0 te zijn:

$$\prod_\alpha (e^{\alpha(H_0)} - 1),$$

dus $\neq 0$, als $H_0 \in D$ en dus elk $e^{\alpha(H_0)} \neq 1$ is.

Voor zulke h_0 overdekken de $\gamma(A)$ éénéén een omgeving van 1, als A een omgeving van 0 doorloopt. Anders gezegd:

$$e^{\sum \tau_\alpha E_\alpha} h_0 e^{-\sum \tau_\alpha E_\alpha}$$

doorloopt éénéén een omgeving van h_0 , als $h = h_0 H$ een omgeving van h_0 in e^D doorloopt en $e^{\sum \tau_\alpha E_\alpha}$ een omgeving van 1 in de varieteit van de $e^{\sum \tau_\alpha E_\alpha}$.

Zij F de vereniging van alle verzamelingen $ae^{D_a}a^{-1}$. Volgens het bewezene is elke $h \in e^D$ inwendig punt van F , dus bestaat F geheel uit

inwendige punten, is dus open in G .

Zij c randpunt van F , dus $c = \lim c_n$, $c_n = a_n h_n a_n^{-1}$ met $a_n \in G$, $h_n \in e^D$. Wegens de compactheid van G kunnen we (na uittrekken van een geschikte deelrij) stellen, dat $\lim a_n = a_0 \in G$, $\lim h_n = h \in e^D$, $c = a_0 h a_0^{-1}$. Daar $c \notin F$ is, is $h_0 \notin e^D$, dus c geconjugeerd met een element van $e^{\overline{D} \setminus D}$.

De deelverzameling van $\overline{D} \setminus D$, die bestaat uit de H met $\alpha(H) = 0$ resp. $2\pi i$ heet D_α resp. D'_α . Van deze D_α en D'_α ($\alpha \in W$) is $\overline{D} \setminus D$ de vereniging. De vereniging van de $a D_\alpha a^{-1}$ resp. $a D'_\alpha a^{-1}$ (over a) heet F_α resp. F'_α . Hun vereniging is $\overline{F} \setminus F$. We willen aantonen:

$$\dim \overline{F} \setminus F \leq \dim G - 3.$$

Hiervoor is het voldoende aan te tonen, dat

$$\dim F_\alpha, \dim F'_\alpha \leq \dim G - 3,$$

en om dit aan te tonen, is het voldoende, de dimensie van het raakvlak aan F_α in een $h_0 \in e^{D_\alpha}$ of $e^{D'_\alpha}$ te berekenen. Dit geschiedt met behulp van de afbeelding γ , elders toegepast met $H_0 = \log h_0 \in D_\alpha$ of $e^{D'_\alpha}$ (waarvoor dus $e^{\pm \alpha(H_0)} = 1$ is) en op een H dat tot $\alpha(H) = 0$ is beperkt. De verzameling, waarop γ wordt toegepast, schiet dus één dimensie tekort, en door het ontaarden van γ bij h_0 met een rangtekort van e , schiet het beeld 3 dimensies tekort, d.w.z. de verzameling der

$$e^{\sum \tau_\alpha E_\alpha} h_0 e^{-\sum \tau_\alpha E_\alpha}$$

heeft in de buurt van h_0 een dimensie $\leq \dim G - 3$, hetgeen we wilden aantonen.

F is dus open in G met een rand, die drie dimensies tekort schiet, dus G niet verdeelt. Dus is F overal dicht in G , dus $\overline{F} = G$, dus is elk element van G geconjugeerd met een van $e^{\overline{D}}$.

Hieruit volgt ook, dat elk element van Γ (unitair) met een element van $\overline{D}$ geconjugeerd is.

Zij θ' een willekeurige stam. In $e^{\theta'}$ is er een a' , dat een in $e^{\theta'}$ overal dichte groep voortbrengt. $a' = g a g^{-1}$ met $a \in e^{\theta}$. Nu is a' zowel in $e^{\theta'}$ als ook in $g^{-1} e^{\theta} g$ bevat, en hetzelfde geldt voor de door a' voortgebrachte groep en zijn afsluiting, dus $e^{\theta'} \subset g^{-1} e^{\theta} g$. Evenzo omgekeerd $e^{\theta} \subset g e^{\theta'} g^{-1}$, waaruit volgt $e^{\theta'} = g e^{\theta} g^{-1}$.

Ook θ' en θ zijn geconjugeerd.

65. We onderzoeken de fundamentealgroep van G .

Als in 't vervolg van omgevingen van de groep-één sprake is, zijn die zo gekozen, dat ze enkelvoudig samenhangend' zijn en dit ook nog geldt voor hun doorsnee met e^Θ .

Is U zo'n omgeving, dan bedoelen we met V er een, zodat $cVc^{-1} \subset U$ voor alle $c \in G$; wegens de compactheid van G bestaat zo iets.

1) Elke weg $w \in \mathcal{M}_U^U$ is U - U -homotoop met een weg h , die in e^D verloopt.

Bewijs: Na aan het begin en eind van w stukken te hebben toegevoegd, die in U verlopen, mogen we veronderstellen, dat

$$w(0), w(1) \in e^D \cap V$$

zijn. Na een kleine wijziging mogen we bovendien veronderstellen, dat

$$w(\tau) \in F.$$

Dan is

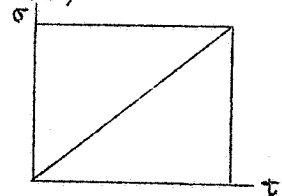
$$w(\tau) = g(\tau)h(\tau)g(\tau)^{-1}, \quad h(\tau) \in e^D, \quad g(0) = 1$$

oplosbaar met continue g en h . Hierbij is h uniek. Door

$$w_\sigma(\tau) = g(\sigma)h(\tau)g(\sigma)^{-1}$$

te beschouwen (zie figuur en vergelijk figuur in 60.6) bewijst men dat w homotoop is met

$$\begin{aligned} & g(0)hg(0)^{-1} \circ gh(1)g^{-1} \\ &= h \circ gg(1)h(0)g(1)^{-1}g^{-1}. \end{aligned}$$



Daar $h(0) = w(0) \in V$ is, is de tweede factor geheel in U en kan door de constante weg $h(1)$ worden vervangen. Dus is w met h U - U -homotoop.

2) Zijn de wegen $w_0, w_1 \in \mathcal{M}_U^U$ in e^D gelegen en U - U -homotoop, dan zijn ze reeds binnen e^D U - U -homotoop.

Bewijs: Er is een schaar w_σ met $w_\sigma(0), w_\sigma(1) \in U$. Als functie van σ opgevat is $w_\sigma(0)$ een weg in U ; d.w.z. is in U homotoop met een weg, die in $U \cap e^D$ verloopt. Er is dus $u_\sigma(\tau) \in U$ met

$$\begin{aligned} u_\sigma(0) &\in U \cap e^D, \quad u_\sigma(1) = w_\sigma(0), \\ u_0(\tau) &= w_0(0), \quad u_1(\tau) = w_1(0). \end{aligned}$$

De wegen

$$w'_0 = u_0 \circ w_0, \quad w'_1 = u_1 \circ w_1$$

zijn ook in e^D gelegen in e^D homotoop met resp. w_0 en w_1 . Voor

$$w'_\sigma = u_\sigma \circ w_\sigma$$

geldt bovendien

$$w'_\sigma(0) \in U \cap e^D,$$

en analoog kan men bereiken

$$w'_\sigma(1) \in U \cap e^D.$$

We mogen veronderstellen, dat de oorspronkelijke w reeds die eigenschappen bezat. Verder mogen we na een kleine wijziging veronderstellen, dat

$$w_\sigma(\tau) \in F$$

is (want de verboden rand van F schiet drie dimensies tekort, kan dus nog door de van twee parameters afhangende $w_\sigma(\tau)$ worden vermeden). Dan is

$$w_\sigma(\tau) = g_\sigma(\tau)^{-1} h_\sigma(\tau) g_\sigma(\tau), \quad h_\sigma(\tau) \in e^D, \quad g_\sigma(0) = 1$$

oplosbaar met continue g en h . Hierbij is h uniek. Wegens $w_\sigma(0) \in e^D$ is $w_\sigma(0) = h_\sigma(0)$, dus $w_1(0) = h_1(0)$, dus wegens $w_1(\tau) \in e^D$ ook $w_1(\tau) = h_1(\tau)$. Verder $w_0(\tau) = h_0(\tau)$. Tenslotte zijn $h_\sigma(0) = w_\sigma(0)$ en $h_\sigma(1) = w_\sigma(1)$ in U . Dus zijn w_0 en w_1 reeds in e^D U - U -homotoop.

3) Elke weg $w \in \mathcal{M}_1^1$ is homotoop met een weg, die op begin- en eindpunt na in e^D verloopt.

Bewijs: Men vat w op als element van $\mathcal{M}_U^U$ en past (1) toe. Dan verkrijgt men een schaar w_σ met $w_0 = w$, $w_1(\tau) \in e^D$, $w_\sigma(0) \in U$, $w_\sigma(1) \in U$. Nu is $w_\sigma(0)$ en $w_\sigma(1)$ homotoop met de constante weg. Door een procedure zoals in (2) verkrijgt men het gewenste resultaat.

4) Zij $w_0, w_1 \in \mathcal{M}_1^1$ en op begin- en eindpunt na in e^D gelegen en zijn ze verder homotoop, dan zijn ze reeds homotoop in $e^D \cup (1)$.

Bewijs: Men kiese U zo, dat in een kanonisch coördinatensysteem $U \cap e^\theta$ een bol wordt. Door van w_0 en w_1 voldoende korte begin- en eindstukken weg te laten, verkrijgt men wegen, die als elementen van $\mathcal{M}_U^U$ kunnen worden opgevat en waarop men (2) kan toepassen. In 't geheel verkrijgt men een schaar w_σ met $w_\sigma(\tau) \in e^D$ voor $0 < \tau < 1$, $w_\sigma(0) \in U$, $w_\sigma(1) \in U$. Laat $u_\sigma(\tau)$ voor elke σ eenparig in τ het lijnstuk van 1 naar $w_\sigma(0)$ doorlopen; evenzo $v_\sigma(\tau)$ dat van $w_\sigma(1)$ naar 1; deze lijnstukken zijn in $U \cap e^D$ gelegen. Dan is $u_\sigma \circ w_\sigma \circ v_\sigma = w'_\sigma$ de gewenste schaar met $w'_\sigma(0) = w'_\sigma(1) = 1$, en in $e^D \cup (1)$ gelegen.

5) Om de fundamentealgroep van G te berekenen, kunnen we ons tot wegen w beperken met $w(0) = w(1) = 1$, $w(\tau) \in e^D$ voor $0 < \tau < 1$. Voor zulk een weg is $\log w(\tau)$ als continue functie van τ ($0 \leq \tau < 1$) met

$\log w(0) = 0$ uniek bepaald; $\log w(\tau) \in D$ voor $0 < \tau < 1$. Wel kan $\lim_{\tau \rightarrow 1} \log w(\tau) \neq 0$ zijn. We noemen

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \log w(\tau) = \eta w.$$

Dan is

$$\eta w \in Z,$$

waarbij Z bestaat uit de elementen H van $\bar{D}$ met $e^H = 1$. Z is eindig. Het is duidelijk dat η de verzameling $\mathcal{M}_1^1$ op Z afbeeldt.

Voor homotopie $w_0, w_1 \in \mathcal{M}_1^1$ met $w_0(\tau), w_1(\tau) \in e^D$ voor $0 < \tau < 1$ kunnen we de schaar w_σ zo aannemen, dat $w_\sigma(\tau) \in e^D$ voor $0 < \tau < 1$. Uit de beschouwing van $\log w_\sigma(\tau)$ en de eindigheid van Z volgt, dat

$$\eta w_0 = \eta w_1.$$

Zij omgekeerd voor twee dergelijke wegen $\eta w_0 = \eta w_1$. Laat dan voor elke τ $H_\sigma(\tau)$ het lijnstuk van $\log w_0(\tau)$ naar $\log w_1(\tau)$ eenparig met $0 \leq \sigma \leq 1$ doorlopen (resp. $H_\sigma(1) = \eta w_0 = \eta w_1$). $e^{H_\sigma(\tau)} = w_\sigma(\tau)$ definieert een schaar, waaruit de homotopie van w_0 en w_1 blijkt.

η brengt dus een 1-1-afbeelding van de fundamentealgroep $\emptyset$ van G op de verzameling Z tot stand.

Stelling: Men vindt een volledig representantensysteem van de fundamentealgroep der unitair beperkte halfenkelvoudige geadjungeerde groep G , in de vorm $e^{H(\tau)}$ door elk punt van Z (= verzameling der $H \in D$ met $e^H = 1$) door één weg H (met $H(\tau) \in D$ voor $0 < \tau < 1$) met 0 te verbinden.

In het bijzonder geldt:

Stelling: De fundamentealgroep van een unitair beperkte halfenkelvoudige Liegroep is eindig. Zijn (universele, dus elke) ontrolling is compact.

66. We berekenen de fundamentealgroep voor de verschillende typen van enkelvoudige (niet abelse) groepen.

Volgens 59a is voor de hoogste wortelvorm elke coördinaat maximaal. De hoogste wortelvorm is dus als functie op θ groter of gelijk elke andere. D (zie 63) is dus bepaald door

$$D : I \rho_j > 0 \quad (j=1, \dots, l), \quad I\mu < 2\pi,$$

waarbij μ de hoogste wortelvorm is (zie 59a). We moeten Z bepalen, d.w.z. alle punten van $\bar{D}$ zoeken met alle $\rho_j \equiv 0 \pmod{2\pi i}$. Deze punten

(opgeschreven met de ρ_j als coördinaten) zijn op een factor $2\pi i$ na:

$$\alpha_1: \begin{aligned} &(0,0,\dots,0,0) \\ &(1,0,\dots,0,0) \\ &(0,1,\dots,0,0) \\ &(0,0,\dots,1,0) \\ &(0,0,\dots,0,1) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1: \begin{aligned} &(0,0,\dots,0) \\ &(0,1,\dots,0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1: \begin{aligned} &(0,0,\dots,0) \\ &(0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_1: \begin{aligned} &(0,0,0,\dots,0) \\ &(1,0,0,\dots,0) \\ &(0,1,0,\dots,0) \\ &(0,0,1,\dots,0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_2: (0,0)$$

$$\mathcal{F}_4: (0,0,0,0)$$

$$\mathcal{E}_6: \begin{aligned} &(0,0,0,0,0,0) \\ &(1,0,0,0,0,0) \\ &(0,0,1,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_7: \begin{aligned} &(0,0,0,0,0,0,0) \\ &(0,1,0,0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_8: (0,0,0,0,0,0,0,0)$$

Dus: de $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{E}_8$ zijn enkelvoudig samenhangend, de fundamenteaalgroep van de geadjungeerde $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{E}_7$ is 2-cyclisch, die van de $\mathcal{E}_6$ is 3-cyclisch. In de overige gevallen moet men, om de structuur nader te bepalen, nog een kleine moeilijkheid overwinnen.

Nummer de punten van Z zoals neergeschreven als $z_0, z_1, \dots$. Bij deze z_1 hoort een weg H_1 van z_0 naar z_1 met $H_1(\tau) \in D$ voor $0 < \tau < 1$, en hierbij hoort het element $e_{H_1}^1$ van Φ . Het product van $e_{H_1}^1$ en $e_{H_j}^j$ kan als $e_{H_1+H_j}^{1+H_j}$ worden verkregen, maar H_1+H_j is helaas in het algemeen geen weg, die op begin- en eindpunt na in D verloopt, zodat we zijn homotopieklasse niet overzien. Om dit te vermijden, vervangen we H_1 of/en H_j te voren door een homotopie weg.

Bij toepassing van een inwendig automorfisme blijft een weg aan zichzelf homotoop, want w is met cwc^{-1} door een schaar $c_\sigma wc_\sigma^{-1}$ verbindbaar (waar c_σ continu van σ afhangt). In 46 hebben we een inwendig automorfisme leren kennen, dat de stam invariant laat. In θ^* induceert het S_α :

$$S_\alpha \xi = \xi - 2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

S_α permuteert de wortelvormen onder elkaar. S_α induceert een afbeelding T_α van θ .

$$\alpha_1: S_{\rho_i} \rho_{i-1} = \rho_{i-1} + \rho_i, S_{\rho_i} \rho_i = -\rho_i, S_{\rho_i} \rho_{i+1} = \rho_i + \rho_{i+1},$$

$$S_{\rho_i} \rho_j = \rho_j \text{ overigens.}$$

$$T_{\rho_i} z_i = z_{i-1} - z_i + z_{i+1}, T_{\rho_i} z_j = z_j \text{ overigens.}$$

$$T_{\rho_i} H_i = H_{i-1} - H_i + H_{i+1}$$

(H_i was een weg van z_0 naar z_i in D op begin- en eindpunt na). Dus

$$e^{H_i} \text{ homotoop met } e^{H_{i-1} - H_i + H_{i+1}}.$$

Hieruit blijkt: ϕ is $(1+1)$ -cyclisch. Want zij reeds bekend dat

$$e^{H_{i-1}} \text{ homotoop met } (e^{H_1})^{i-1},$$

$$e^{H_i} \quad " \quad " \quad (e^{H_1})^i,$$

dan volgt hieruit

$$e^{H_{i+1}} \quad " \quad " \quad (e^{H_1})^{i+1}.$$

$$\psi_1 (1 \leq 4): S_{\rho_1} \rho_1 = -\rho_1, S_{\rho_1} \rho_2 = \rho_1 + \rho_2, S_{\rho_1} \rho_j = \rho_j \text{ overigens.}$$

$$S_{\rho_2} \rho_2 = -\rho_2, S_{\rho_2} \rho_1 = \rho_1 + \rho_2, S_{\rho_2} \rho_j = \rho_j \quad " \quad .$$

$$S_{\rho_3} \rho_3 = -\rho_3, S_{\rho_3} \rho_4 = \rho_3 + \rho_4, S_{\rho_3} \rho_j = \rho_j \quad " \quad .$$

$$T_{\rho_1} z_1 = -z_1 + z_2, T_{\rho_2} z_2 = -z_2 + z_3, T_{\rho_3} z_3 = -z_3 + z_4.$$

Analoog als bij α_1 volgt hieruit, dat alle elementen van $\emptyset$ van de orde twee zijn.

67. In dit nummer speelt de unitaire beperking geen rol. We bestuderen de kaleidoskoopgroep K nader, d.w.z. de groep voortgebracht door de $S_\alpha (\alpha \in W)$. Hiernaast beschouwen we de groep K' voortgebracht door de $S_\alpha (\alpha \in P)$. Achteraf blijken K en K' overeen te stemmen.

We identificeren θ en θ^* op de gebruikelijke wijze. De vlakken $\alpha=0$ ($\alpha \in W$) verdelen θ in gebieden genaamd kamers. Punten van θ heten equivalent, wanneer ze door afbeeldingen uit K' in elkaar kunnen worden overgevoerd. Een punt heet dominant, als het door geen equivalent element wordt overtroffen in de gebruikelijke rangschikking. Noodzakelijk voor dominantie van ξ is

$$(\xi, \rho) \geq 0 \text{ voor alle } \rho \in P,$$

omdat anders ξ equivalent zou zijn met zekere $\xi + m\rho$ ($m > 0$), die hoger staat.

$$(\xi, \rho) > 0 \text{ voor alle } \rho \in P$$

beschrijft een kamer, de bovenste kamer C . Alle dominante punten liggen in $\bar{C}$. Elk punt ξ is equivalent met een uit $\bar{C}$, want is ξ het hoogste met ξ equivalente punt, dan moet $(\xi, \rho) \geq 0$ voor alle $\rho \in P$ zijn, omdat er anders een hogere $\xi + m\rho$ zou zijn.

K' is dus transitief over de verzameling van de kamers.

Zij $\alpha \in W$. Dan is er een kamer, waarvan $\alpha=0$ een wand is, en een $S \in K'$, die deze kamer in de bovenste kamer overvoert. $S\alpha$ is wand van de bovenste kamer, dus gelijk aan ρ of $-\rho$ voor zekere $\rho \in P$. $S^{-1}S_\rho S$ is een spiegeling, en wel wegens $S^{-1}S_\rho S\alpha = -\alpha$, de spiegeling S_α . Dus is $S_\alpha \in K'$. Dus valt (de door alle $S_\alpha, \alpha \in W$) voortgebrachte K met K' samen.

We tonen nu aan, dat K over de verzameling der kamers eenvoudig transitief is, anders gezegd, dat $SC=C$ ($S \in K$) impliceert $S=1$.

Neem zo'n S . Uit $(\xi, \alpha) > 0$ voor alle $\alpha \in W$ volgt dan $(S\xi, \alpha) > 0$, dus $(\xi, S^{-1}\alpha) > 0$ voor alle $\alpha \in W$. Dus kan S^{-1} geen positieve wortelvorm in een negatieve overvoeren. Daar S de wortelvormen permuteert, permuteert het de positieve onder elkaar.

Neem een voorstelling

$$S = S_{\sigma_1} \dots S_{\sigma_1},$$

waarbij $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in P$ zijn en het aantal factoren minimaal is. Stel $p > 0$.

$$S_{\sigma_1} \sigma_1 = -\sigma_1 < 0,$$

dus is er een k , zo dat

$$S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_1} \sigma_1 < 0,$$

$$S_{\sigma_{k+1}} S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_1} \sigma_1 > 0.$$

Elke S_p verwisselt $\pm p$ met elkaar en de overige positieve wortelvormen onderling. Dit op $S_{\sigma_{k+1}}$ toegepast levert op

$$S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_1} \sigma_1 = -\sigma_{k+1},$$

dus

$$S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_2} \sigma_1 = \sigma_{k+1}.$$

$$(S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_2})^{-1} S_{\sigma_{k+1}} (S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_2})$$

is een spiegeling, die σ_1 in $-\sigma_1$ overvoert dus $= S_{\sigma_1}$. Dus

$$S_{\sigma_{k+1}} S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_2} = S_{\sigma_k} \dots S_{\sigma_2} S_{\sigma_1}.$$

Substitutie hiervan in de uitdrukking van S levert een uitdrukking die twee termen korter is. De veronderstelling $p > 0$ is dus onmogelijk, dus is S de identiteit.

Het feit, dat elk punt met een van $\bar{C}$ equivalent is en geen twee punten van C onderling equivalent zijn, wordt ook uitgedrukt door de formulering: C is fundamenteaalgebied van K .

Stelling: De kaleidoskoopgroep wordt door de S_p met $p \in P$ voortgebracht. De dominante punten vormen een afgesloten fundamenteaalgebied. Elk fundamenteaalgebied beantwoordt aan een orde van de wortelvormen.

Het laatste is nog aan te tonen. Elk ander fundamenteaalgebied heeft de vorm SC . Stel $S_p = \sigma_1$. Kies een orde, waarbij de σ_i positief zijn. Is ξ in de bovenkamer van een nieuwe orde, dus $(\xi, \sigma_i) > 0$ voor alle i , dan is $(\xi, S_{\sigma_i}) > 0$, $(S^{-1}\xi, \rho_1) > 0$, dus $S^{-1}\xi$ in de bovenkamer van de oude orde, dus $S^{-1}\xi \in C$, $\xi \in SC$. En omgekeerd.

68. In elke Liegroep G kan men een linksinvariant en een rechtsinvariant volume-element invoeren, door er een bij de groep één aan te nemen en door links- resp. rechtsvermenigvuldigingen over te plaatsen. Willen we rechts- en linksinvariantie hebben, dan moet het volume-element bij de groep één invariant zijn t.a.v. $x \rightarrow axa^{-1}$, d.w.z. t.a.v. de geadjungeerde groep G . Daar deze lineair is, komt het erop neer, dat

$$\det \tilde{a} = 1 \quad \text{voor alle } a \in G$$

is. Dit is steeds het geval als $\tilde{G}$ compact is, want dan is de functie $\det \tilde{a}$ beperkt dus $=1$. Ook voor alle halfenkelvoudige G is dit het geval, omdat daar $\text{sp } \tilde{A} = 0$ voor $A \in \mathfrak{r}$ is.

Men heeft zelfs een invariante maat in elke lokaal compacte groep. (Zonder bewijs.)

Zij G een compacte groep en f een continue niet-triviale lineaire voorstelling van G in een eindig dimensionale complexe lineaire ruimte R .

$$H = \int_{a \in G} \overline{f(a)}' f(a) d \text{ vol}_a$$

is een hermitische matrix (indien het accent de spiegeling t.a.v. een unitair inproduct en de streep het geconjugerd complexe aanduidt), want

$$\overline{H}' = H.$$

Voor $x \in R$ is

$$(Hx, x) = \int (f(a)' f(a)x, x) d \text{ vol}_a = \int (f(a)x, f(a)x) d \text{ vol}_a.$$

Daar $f(a)x$ continu en $(f(a)x, f(a)x) \geq 0$ is kan $(Hx, x) = 0$ alleen als $(f(a)x, f(a)x) = 0$ is, dus als $f(a)x = 0$ identiek in a is. Dit is wegens de niet-trivialiteit van de voorstelling alleen mogelijk als $x = 0$. Dus is H positief definit. We kunnen dus (Hx, y) als nieuw inproduct in R gebruiken. Nu is

$$\begin{aligned} \overline{f(c)}' H f(c) &= \int_{a \in G} \overline{f(c)}' \overline{f(a)}' f(a) f(c) d \text{ vol}_a \\ &= \int_{a \in G} \overline{f(ac)}' f(ac) d \text{ vol}_a \\ &= \int_{b \in G} \overline{f(b)}' f(b) d \text{ vol}_b \\ &= H. \end{aligned}$$

Dus is $(H f(c)x, f(c)y) = (Hx, y),$

dus is het nieuwe inproduct invariant t.a.v. de voorstelling van G . De voorstelling is dus equivalent met een unitaire.

Hieruit volgt, dat de voorstelling volledig reducibel is, d.w.z. R is directe som van deelruimten, waarin de voorstelling irreducibel is.

Zij namelijk S invariante deelruimte van R bij $f(G)$, dus

$$f(a)S \subset S.$$

Dan is het orthogonale complement T van S in R ook invariant, want uit $x \in T$, dus $(x, S) = 0$ volgt wegens de invariantie van het inproduct $(f(a)x, f(a)S) = 0$, dus $(f(a)x, S) = 0$, dus $f(a)x \in T$. Zo voortgaande met het splitsen, vindt men onderling orthogonale minimale invariante deelruimten, waarvan R de directe som is.

De stelling van de volledige reducibiliteit geldt in het bijzonder voor de voorstellingen van unitair beperkte halfenkelvoudige groepen, omdat die immers compact zijn. Zij geldt zelfs voor de voorstellingen in het klein, omdat die als voorstellingen van de universele ontrolling kunnen worden opgevat (zie 60.7), die ook nog compact is (zie 65). Zij geldt ook nog voor de voorstellingen φ van een unitair beperkte halfenkelvoudige Lie-algebra Γ ; immers φ induceert een voorstelling in het klein van e^Γ , en deelruimten, die bij Γ invariant zijn, zijn het ook bij e^Γ , en omgekeerd.

De stelling geldt ook nog voor complexe halfenkelvoudige Lie-algebras Γ , want als S bij Γ invariant is, dan ook bij Γ_u , dus is er een lineaire deelruimte T met $S \cap T = (0)$, $S + T = R$, die bij Γ_u invariant is, maar die is bij de complexe uitbreiding Γ van Γ_u ook invariant. De stelling geldt dus ook voor reële halfenkelvoudige Lie-algebras Γ . Want is S bij Γ invariant, dan ook bij zijn complexe uitbreiding Γ_ω , dus is er een T met $S \cap T = 0$, $S + T = R$, die bij Γ_ω invariant is, dus ook bij Γ ; is de voorstelling φ in een reële ruimte R geschieden S reëel, maar T per ongeluk complex, dan is ook $\bar{T}$ nog invariant bij Γ en $S \cap \bar{T} = 0$, dus ook de in $T + \bar{T}$ liggende maximale reële ruimte T_0 invariant en $S \cap T_0 = (0)$, $S + T_0 = R$.

Tenslotte geldt de stelling ook nog voor de voorstellingen (en voor de voorstellingen in 't klein) van de complexe en de reële halfenkelvoudige Lie-groepen.

Stelling: Lineaire voorstellingen in eindig dimensionale ruimten van compacte groepen en van reële of complexe halfenkelvoudige Lie-groepen en Lie-algebras zijn volledig reducibel.

Hiervan geldt een zekere omkering:

Stelling: Een irreducibele Liegroep (Lie-algebra) is direct product (directe som) van een halfenkelvoudige Liegroep (Lie-algebra) en een eendimensionale abelse Liegroep (algebra) van scalair-vermenigvuldigingen.

Bewijs: Zij Γ die algebra (voor groepen gaat het nog iets eenvoudiger). Zij $\Delta \neq 0$ een abels ideaal. Er is een simultane eigenvector van Δ , dus is er een maximale verzameling $L_1 \neq (0)$ van x met

$$Ax = \lambda_A x \text{ voor } A \in \Delta.$$

Definieer L_p als verzameling der x met

$$(A - \lambda_A)^p x = 0 \text{ voor } A \in \Delta.$$

Door inductie bewijst men

$$C L_{p-1} \subset L_p \text{ voor } C \in \Gamma.$$

Want dit veronderstellende krijgt men voor $x \in L_p$

$$(A - \lambda_A)^{p+1} Cx = (A - \lambda_A)^p (A - \lambda_A) Cx = (A - \lambda_A)^p C(A - \lambda_A)x + (A - \lambda_A)^p [A, C]x;$$

de eerste summand verdwijnt wegens $(A - \lambda_A)x \in L_{p-1}$ en de inductieveronderstelling; en de tweede, omdat wegens de commutativiteit van Δ de factoren mogen worden verwisseld. Dus inderdaad $Cx \in L_{p+1}$. Dus is $\bigcup L_p$ invariante deelruimte, dus $=R$. Dus hebben de $A \in \Delta$ in R slechts de eigenwaarde λ_A . Voor $x \in L_1$ is

$$[A, C]x = \lambda_{[A, C]} x = 0,$$

omdat $\text{sp}[A, C]$ enerzijds 0, anderzijds veelvoud van $\lambda_{[A, C]}$ is. Dus

$$ACx = CAx = \lambda_A Cx.$$

Dus reeds

$$CL_1 \subset L_1$$

dus L_1 invariant en dus $=R$. Dus

$$Ax = \lambda_A x \text{ voor } A \in \Delta, x \in R.$$

Daar $\Delta \neq 0$, bestaat Δ uit alle scalair-vermenigvuldigingen, dus is

$\Gamma = \Delta + \Delta_1$ (direct), waar Δ_1 de subalgebra der C met $\text{sp } C = 0$ is. Δ_1 is nog steeds irreducibel, maar kan nu geen abels ideaal bezitten, is dus halfenkelvoudig. Hiermee is het gestelde bewezen.

Stelling: Een volledig reducibele Liegroep (algebra) is in het klein direct product (directe som) van enkelvoudige.

Bewijs. Zij R directe som van de minimale invariante deelruimten R_i . Γ alleen op R_i bekeken is een algebra Γ_i , die door een natuurlijk homomorfisme γ_i beeld van Γ is. De kernen Δ_i van γ_i hebben de doorsnee (0) . γ_i beeldt de commutatoralgebra Γ' van Γ in Γ'_i , die van Γ_i af. Volgens de vorige stelling is Γ'_i halfenkelvoudig. Zij $\emptyset$ de radicaal van Γ' . $\gamma_i \emptyset$ is in de radicaal van Γ'_i , dus $= (0)$. Wegens $\bigcap \Delta_i = (0)$ is dus $\emptyset = 0$, dus is ook Γ' halfenkelvoudig en zit in Γ als directe summand; de andere summand is isomorf met $\Gamma \bmod \Gamma'$, dus commutatief, dus directe som van enkelvoudige algebras; hetzelfde geldt voor Γ' .

Dank zij de stelling van de volledige reducibiliteit kunnen we ons tot irreducibele voorstellingen van halfenkelvoudige groepen (algebras) beperken, willen we alle lineaire voorstellingen leren kennen.

69. Het volgende geldt voor groepen zonder meer (niet noodzakelijk Lie-groepen).

Twee voorstellingen f en g van een groep G door lin. afb. van lin. ruimten R en S heten verbonden, indien er een afbeelding K van R in S met $K \neq 0$ en

$$K f(a) = g(a) K \text{ voor alle } a \in G.$$

Stelling: Zijn f en g irreducibel en niet-triviaal (d.w.z. $\neq 0$), dan is K 1-1 en op.

Bewijs: Zij N de nulruimte van K . Dan is $g(a)KN = (0)$ dus $Kf(a)N = 0$, dus $f(a)N \subset N$, dus wegens de irreducibiliteit van f : $N = (0)$ of $N = R$, maar de tweede mogelijkheid is uitgesloten wegens $K \neq 0$. Dus is K 1-1. Verder is $g(a)KR \subset Kf(a)R \subset KR$, dus KR invariant bij g , dus $KR = R$ (omdat $KR = 0$ uitgesloten is), dus is K "op".

Voorstellingen in R en S van f en g van eenzelfde G met een K , die R op S 1-1 afbeeldt, zodat

$$Kf(a) = g(a)K$$

heten ook equivalent. Dus:

Verbondene irreducibele voorstellingen zijn equivalent.

Stelling: Is G een irreducibel stel lin.afb. van R in zichzelf en de lin.afb. P van R in zichzelf commuterend met alle $a \in G$, dan is P een scalair-vermenigvuldiging.

Bewijs: Zij λ eigenwaarde van P . Zij S de verzameling van alle $x \in R$ met $Px = \lambda x$ voor alle $a \in G$. Dan is S een lin.deelruimte van R en $Pax = aPx = \lambda ax$, dus S invariant bij G , dus $S = R$. Dus $Px = \lambda x$ voor alle $x \in R$.

Stelling: Onder de voorwaarden der voorlaatste stelling is er op een scalaire factor na maar één K , die de equivalentie bemiddelt.

70. Stelling: Zij G een groep van unitaire afbeeldingen van R in zichzelf en S invariante deelruimte. Dan is ook het orthogonale complement S' van S invariant; de projectie K van R op S commuteert met alle elementen van G . (Evident.)

Stelling: Dezelfde voorwaarden, en T een tweede invariante deelruimte. Zij G irreducibel op S en op T . Stel, dat de voorstellingen van G door beperking tot S en tot T inequivalent zijn. Dan zijn S en T onderling loodrecht.

Bewijs: Met K zoals in de vorige stelling geldt $Ka = aK$, dus $Kax = aKx$ voor alle $x \in R$. We beperken x tot T en kunnen dus schrijven $Kf(a)x = g(a)Kx$ waar f resp. g de voorstellingen van G door beperking tot T resp. S zijn. Wegens de nietequivalentie is $K=0$, dus $KT=0$, dus T loodrecht op S .

71. G wordt weer als compacte groep verondersteld. Met behulp van de invariante maat op G definiëren we de unitaire ruimte $\tilde{\Phi}$ van de op G Lebesgue-absoluut-kwadraat-integreerbare functies.

Door

$$(\Delta(a)\varphi)(x) = \varphi(xa)$$

wordt een voorstelling Δ van G in $\tilde{\Phi}$ gedefinieerd. De $\Delta(a)$ zijn lineair en unitair, aangezien

$$\begin{aligned} (\Delta(a)\varphi, \Delta(a)\psi) &= \int \varphi(xa) \overline{\psi(xa)} d \text{vol}_x = \\ &= \int \varphi(x) \overline{\psi(x)} d \text{vol}_x = (\varphi, \psi) \end{aligned}$$

is. Δ heet de universele voorstelling van G .

Stelling: Elke irreducibele voorstelling f van G in een eindig-dimensionale R is (op equivalentie na) in de universele terug te

vinden.

Bewijs: We kiezen een lineair functioneel $u \neq 0$ op R en beschouwen de $u(f(a)x)$ als functies van a , dus als elementen van Φ . Zij vormen een lin. deelruimte $\Phi_{u,f}$ van Φ . De afbeelding K van R op $\Phi_{u,f}$, gedefinieerd door

$$(Kx)(a) = u(f(a)x)$$

is lineair en ééneen.

$$\Delta(c)K = Kf(c) \text{ voor alle } c \in G$$

want

$$(\Delta(c)Kx)(a) = u(f(ac)x) = u(f(a)f(c)x) = (Kf(c))x(a).$$

K bemiddelt dus een equivalentie tussen f en de tot $\Phi_{u,f}$ beperkte universele voorstelling van G .

We noemen deze voorstelling ook f_u . Is in R een basis gegeven, betekent het functioneel u de i -de coördinaat, en interpreteert men de $f(a)$ als matrices, dan is Kx voor elk basiselement x een matrixelement van $f(a)$ in de i -de kolom, opgevat als functie van a . De ruimte $\Phi_{u,f}$ is dan voortgebracht door de matrixelementen in de i -de kolom, als functies van a beschouwd.

Als aanvulling op de vorige stelling verkrijgen we (onder dezelfde veronderstellingen):

Stelling: Elke invariante deelruimte S van Φ , die door Δ equivalent met f wordt getransformeerd, is van de vorm $\Phi_{u,f}$ met geschikte $u \neq 0$; Δ werkt daar als f_u .

Bewijs: Gegeven is een equivalentie C , d.w.z. een lin. afb. van R op S , zodat

$$\Delta(a)C = Cf(a).$$

Cx is voor $x \in R$ een element van Φ , dus is $(Cx)(1)$ een lin. functioneel in x , dus van de vorm $u(x)$ met geschikte u .

$$(Cx)(a) = (\Delta(a)Cx)(1) = (Cf(a)x)(1) = u(f(a)x),$$

waaruit het te bewijzen volgt.

Φ_f zij de door de $\Phi_{f,u}$ voortgebrachte lin. deelruimte van Φ . De matrixelementen van $f(a)$, opgevat als functies van a , noemen we een basis van Φ_f . Alle met f equivalent getransformeerde invariante deelruimten van Φ zitten in Φ_f .

Stelling: Voor inequivalente irreducibele f en g zijn Φ_f , Φ_g orthogonaal op elkaar.

Bewijs: Uit de tweede stelling van 70 volgt: $\Phi_{f,u}$ orthogonaal op $\Phi_{g,v}$. Dus Φ_f orthogonaal op Φ_g .

Dieper ligt de volgende

Stelling (zonder bewijs): Φ is een kleinste afgesloten deelruimte van Φ , die alle Φ_f , behorende bij de diverse nietequivalente eindig-dimensionale lin. voorstellingen, bevat.

Stelling: Van een unitaire irreducibele voorstelling zijn de matrixelementen (als functies op G) onderling orthogonaal; het lengtekwadraat van elk matrixelement is $\frac{1}{n}$ vol G (waar n de dimensie van f is).

Bewijs: Bij gegeven u, v stelt

$$\int (f(a)x, u) \overline{(f(a)y, v)} d \text{ vol}_a$$

een bij f invariant inproduct $(x, y)'$ voor, is dus wegens de irreducibiliteit van f op een vaste factor na gelijk aan (x, y) . Om symmetrieredenen kan men zelfs zeggen:

$$\int (f(a)x, u) \overline{(f(a)y, v)} d \text{ vol}_a = \gamma(x, y)(u, v)$$

waar γ constant is. Voor $(x, y)=0$ of $(u, v)=0$ is dat 0, waaruit de orthogonaliteit van verschillende matrixelementen volgt. Laat men in deze formule $x=y$ en $u=v$ een orthonormale basis doorlopen en sommeert men, dan krijgt men verder de integraal der absoluut-kwadraat-som der matrixelementen van een unitaire matrix, dus n ; rechts γn^2 . Dus

$$n \text{ vol } G = \gamma n^2,$$

dus

$$\gamma = \frac{1}{n} \text{ vol } G.$$

Het spoor van een lin. voorstelling f is een functie op G , die ook het karakter χ_f van die voorstelling heet. Uit de vorige stellingen volgt:

Stelling: De karakters van inequivalente irreducibele voorstelling zijn orthogonaal op elkaar. Het lengtekwadraat van elk irreducibel karakter is vol G .

Stelling: De matrixelementen van een volledig stel inequivalente irreducibele unitaire voorstellingen der compacte groep G vormen een totaal orthogonaalstelsel voor Φ . De irreducibele karakters vormen er een voor de klassefuncties uit Φ (de functies, die op elke klasse geconjugeerde elementen constant zijn).

Bewijs: Het eerste deel volgt onmiddellijk uit vroegere stellingen. Zij φ een klassefunctie $\in \Phi$. φ bezit een ontwikkeling naar matrix-

coëfficiënten (bases $x_1^1, \dots, x_n^1$) van de irreducibele unitaire voorstellingen f_i :

$$\varphi(a) = \sum \alpha_{ijk}(f_i(a)x_j^1, x_k^1).$$

Voor een irreducibele f commuteert

$$f(c^{-1}ac)d \text{ vol}_c$$

met alle $f(b)$, is dus scalair veelvoud van de 1. Door het spoor te nemen, ziet men dat die factor $\frac{1}{n_i} \chi_{f_i}(a) \text{vol } G$ is.

$$\varphi(a) \text{vol } G = \int \varphi(c^{-1}ac)d \text{ vol}_c = \sum \alpha_{ijk} \frac{1}{n_i} \chi_{f_i}(a)(x_j^1, x_k^1).$$

Dit geeft de gewenste ontwikkeling van φ naar karakters.

71. We beschouwen weer een halfenkelvoudige unitair beperkte geadjungeerde groep G met infinitesimale algebra Γ en stam Θ . In de lineaire ruimten Θ en E (opgespannen door de E_α) worden volumes als gebruikelijk gedefinieerd (antisymmetrische multilineaire functies van 1 resp. $r-1$ vectoren; ijking vereist). In Γ wordt de volumefunctie als product van deze twee gedefinieerd. Door rechts- (of links-)vermenigvuldiging worden de volumefuncties in Θ en Γ overgebracht naar de tangentiaalruimten in andere punten van e^Θ en e^Γ . Invariante volumes in e^Θ en e^Γ volgen hieruit door integratie.

Zij U een parallelotoop bij de 0 in Θ , analoog V in E . Zij $h=e^H e e^\Theta$. Overeenkomstig de uitdrukking voor de functionaaldeterminant van γ in 64 is

$$\text{vol } \bigcup_{a \in e^V} a h e^{U_a^{-1}} = \prod_{\alpha \in W} (e^{\alpha(H)} - 1) \cdot \text{vol } U \cdot \text{vol } V + \dots,$$

waarbij de stippeltjes grootheden van hogere orde aanduiden.

Dus voor twee punten $h \in e^\Theta$ verhouden de volumes van $\bigcup_{a \in e^V} a h e^{U_a^{-1}}$ zich in eerste benadering als de overeenkomstige $\prod_{\alpha \in W} (e^{\alpha(H)} - 1)$. De verhouding hangt niet van V af en ook niet van de stam Θ maar alleen van de klasse geconjugeerde elementen waartoe h behoort. Dus verhouden voor verschillende h ook de

$$\text{vol } \bigcup_{a \in G} a h e^{U_a^{-1}}$$

zich als

$$\prod_{\alpha \in W} (e^{\alpha(H)} - 1).$$

Dus op een normeringsfactor na, die we gerust 1 mogen stellen

$$\text{vol } U \bigcup_{a \in G} a h e^U a^{-1} = \prod_{\alpha \in W} (e^{\alpha(H)} - 1) \text{vol } U + \dots$$

Een klassefunctie φ is bekend door zijn waarden op e^θ .

$$\int_{a \in G} \varphi(a) d \text{vol}_a = \int_{h \in e^\theta} \varphi(h) \prod_{\alpha \in W} (e^{\alpha(H)} - 1) d \text{vol}_h$$

waar $h=e^H$, en het volume-element in de tweede integraal in e^θ is te nemen. De orthogonaliteitsrelaties voor karakters zijn nu met de afkortingen

$$\Delta(h) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha(H)} - 1)$$

$$\bar{\Delta}(h) = \prod_{\alpha < 0} (e^{\alpha(H)} - 1)$$

$$\psi = \chi \Delta$$

te schrijven als

$$\int \chi_1(h) \overline{\chi_2(h)} \Delta(h) \bar{\Delta}(h) d \text{vol}_h = \text{vol}_0 G$$

dus
$$\int \psi_1(h) \overline{\psi_2(h)} d \text{vol}_h = \text{vol}_0 G.$$

Ze verschijnen dus als orthogonaliteitsrelaties voor de functies $\chi \Delta$ met het volume-element van e^θ .

Dit verklaart, waarom straks in allerlei formules niet de karakters zelf maar hun producten met zoiets als Δ optreden.

72. Gegeven een Lie-algebra Γ (we hoeven van de basis alleen existentie niet eindigheid te veronderstellen; de coëfficiënten hoeven niet uit een lichaam te komen, een ring met één element is voldoende).

We gaan Γ inbedden in een associatieve algebra E , de omhullende algebra van Γ . Hoe zo iets moet, is duidelijk.

We vormen de vrije associatieve algebra X over de basis $x_1, x_2, \dots$ van Γ , d.w.z. met als elementen de veeltermen

$$\sum \alpha_{p_1 p_2 \dots p_m} x_{p_1} x_{p_2} \dots x_{p_m},$$

en in X het ideaal R voortgebracht door de

$$x_i x_j - x_j x_i - [x_i, x_j].$$

We definiëren

$$E = X \text{ mod } R.$$

Een element in X heet kanonisch, als het de vorm bezit

$$\sum \alpha_{i_1 i_2 \dots} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots \quad (\text{slechts eindig veel exponenten } \neq 0). \quad (1)$$

(Dus de x_i staan er op volgorde.) Elk element van X is mod R congruent met een kanonisch element.

Stelling: Het enige kanonische element in R is 0 .

Hieruit volgt onder meer, dat Γ door de afbeelding "mod R " éénéén wordt ingebed.

Hulpstelling: Zij R_m de verzameling der

$$\sum u_{ij} (x_i x_j - x_j x_i - [x_i x_j]) v_{ij} \quad (2)$$

met $u_{ij}, v_{ij} \in X$ allen $\neq 0$,

$$\text{graad } u_{ij} + \text{graad } v_{ij} \leq m.$$

Is

$$w \in R_m, \quad \text{graad } w \leq m+1,$$

dan is zelfs

$$w \in R_{m-1}$$

Bewijs der stelling: We gebruiken de notatie van de hulpstelling. Zij voor een $w \neq 0$ der vorm (1) een voorstelling (2) mogelijk en zo gekozen dat $\max(\text{graad } u_{ij} + \text{graad } v_{ij})$ minimaal is. Rekent men in (1) en (2) commutatief met de basiselementen (d.w.z. mod het door de $x_i x_j - x_j x_i$ voortgebrachte ideaal), dan blijkt dat

$$\text{graad } (2) \leq m+1,$$

dus volgens hulpstelling (2) $\in R_{m-1}$ in strijd met de veronderstelling omtrent m .

Bewijs der hulpstelling: Zij w van de vorm (2) en $\text{graad } w \leq m+1$. Zij $\sum_m$ het deel van de som waarvoor

$$\text{graad } u_{ij} + \text{graad } v_{ij} = m.$$

(Alle dergelijke sommen worden "netjes", d.w.z. zo kort mogelijk verondersteld.) Dan is wegens de veronderstelling omtrent $\text{graad } w$

$$\sum_m u_{ij} (x_i x_j - x_j x_i) v_{ij} = 0. \quad (3)$$

We moeten aantonen, dat hieruit volgt

$$\sum_m u_{ij} [x_i x_j] v_{ij} \in R_{m-1} . \quad (4)$$

Onder Z verstaan we de verzameling der producten van basiselementen $x_1, x_2, \dots$ met $n=m+2$ factoren (in willekeurige volgorde). Voor elke

$$z = x_{i_1} \dots x_{i_a} x_{i_{a+1}} \dots x_{i_n}$$

zij

$$P_a z = x_{i_1} \dots x_{i_{a+1}} x_{i_a} \dots x_{i_n},$$

$$Q_a z = x_{i_1} \dots [x_{i_a}, x_{i_{a+1}}] \dots x_{i_n} .$$

Het linkerlid van (3) bestaat uit summanden

$$\alpha(1-P_a)z \quad (z \in Z) .$$

Met zulk een summand is er wegens het verdwijnen van de som ook een summand

$$\alpha(1-P_b)P_a z ,$$

verder

$$\alpha(1-P_c)P_b P_a z ,$$

enz. Het linkerlid van (3) is een lineaire combinatie van uitdrukkingen

$$\left((1-P_{a_1}) + (1-P_{a_2})P_{a_1} + \dots + (1-P_{a_k})P_{a_{k-1}} \dots P_{a_2} P_{a_1} \right) z$$

met

$$P_{a_k} P_{a_{k-1}} \dots P_{a_2} P_{a_1} = 1. \quad (5)$$

Overeenkomstig is het linkerlid van (4) lineaire combinatie van

$$(Q_{a_1} + Q_{a_2} P_{a_1} + \dots + Q_{a_k} P_{a_{k-1}} \dots P_{a_2} P_{a_1}) z .$$

Van deze uitdrukkingen tonen we aan, dat zij onder de veronderstelling (5) verdwijnen.

De "woorden" opgebouwd uit "letters" $1, \dots, n-1$ vormen een verzameling $\mathfrak{m}$. We definiëren inductief P_A en Q_A voor $A \in \mathfrak{m}$:

$$P_{aA} = P_a P_A ,$$

$$Q_{aA} = Q_A + Q_a P_A .$$

Inductief bewijst men

$$P_{AB} = P_A P_B \quad (6)$$

$$Q_{AB} = Q_B + Q_A P_B \quad (7)$$

Verder is evident

$$Q_a(1+P_a) = 0 \quad (8)$$

Wat we willen bewijzen, luidt nu:

Uit $P_A = 1$ volgt $Q_A z \in R_{m-1}$ voor alle $z \in Z$.

De woorden $A \in \mathfrak{M}$ met $P_A=1$ vormen een deelverzameling $\mathfrak{M}_1$.

De woorden $A \in \mathfrak{M}_1$ met $Q_A z \in R_{m-1}$ voor alle $z \in Z$ vormen een deelverzameling $\mathfrak{M}_0$. We willen dus aantonen:

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_1 \quad (9)$$

$\mathfrak{M} / \mathfrak{M}_1$ is de symmetrische groep (met als permutanden de "plaatsen" in een element van Z).

Tot $\mathfrak{M}_1$ behoren de woorden

$$W_a = aa,$$

$$W_{a(a+1)} = a(a+1)a(a+1)a(a+1),$$

$$W_{ab} = ab ab \text{ (voor } |a-b| > 1),$$

die we onder $\mathfrak{M}_2$ samenvatten.

Zij C^* het woord C achterstevoren. De verzameling der C^*AC met $A \in \mathfrak{M}_2$ heet $\mathfrak{M}_3$. De verzameling der producten van elementen van $\mathfrak{M}_3$ heet $\mathfrak{M}_4$. $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}_4 \subset \mathfrak{M}_1$. Woorden, die uit elkaar ontstaan door inlassen of/en schrappen van enige aa heten equivalent. De woorden uit $\mathfrak{M}_2$ vormen een voortbrengend relatiesysteem van de symmetrische groep, d.w.z. elk woord uit $\mathfrak{M}_1$ is equivalent met een uit $\mathfrak{M}_4$. We tonen nu aan

$$1) \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_0.$$

$$2) \text{ Met } A \text{ is ook } C^*AC \in \mathfrak{M}_0, \text{ dus } \mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}_0.$$

$$3) \text{ Met } A, B \text{ is ook } AB \in \mathfrak{M}_0, \text{ dus } \mathfrak{M}_4 \subset \mathfrak{M}_0.$$

$$4) \text{ Met elk woord zijn ook zijn equivalenten in } \mathfrak{M}_0, \text{ dus } \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0.$$

Hieruit blijkt dan het te bewijzen (9).

ad 2) We hoeven dit alleen te bewijzen voor een C bestaande uit één letter c:

$$\begin{aligned} Q_{cAc}z &= Q_c z + Q_A P_c z + Q_c P_A P_c z \\ &= Q_c (1 + P_c) z + Q_A P_c z \in R_{m-1} \end{aligned}$$

als $A \in \mathfrak{m}_0$. (Hier wordt 6,7,8 gebruikt.)

$$\text{ad 3)} \quad Q_{AB}z = Q_B z + Q_A P_B z \in R_{m-1}$$

als $A, B \in \mathfrak{m}_0$. (Hierbij wordt 7 gebruikt.)

$$\begin{aligned} \text{ad 4)} \quad Q_{AaaB}z &= Q_B z + Q_a (P_B + P_{aB})z + Q_A P_{aaB}z \\ &= Q_B z + Q_a (1 + P_a) P_B z + Q_A P_B z = Q_{AB}z. \end{aligned}$$

(Hier wordt 6,7,8 gebruikt.)

ad 1) T.a.v. W_a zie ad 4). We beschouwen nu het geval $W_{a(a+1)}$. Voor het gemak nemen we aan, dat in

$$z = x_{i_1} \dots x_{i_a} \dots x_{i_n}$$

$i_a=1, i_{a+1}=2, i_{a+2}=3$ is, en schrijven we

$$z = px_1 x_2 x_3 q.$$

Dan wordt

$$\begin{aligned} Q_{W_{a(a+1)}} z &= \\ &px_1 [x_2, x_3] q + p [x_1, x_3] x_2 q + px_3 [x_1, x_2] q + p [x_3, x_2] x_1 q + px_2 [x_3, x_1] q + \\ &\quad + p [x_2, x_1] x_3 q \\ &= p (x_1 [x_2, x_3] - [x_2, x_3] x_1 - [x_1, [x_2, x_3]] \\ &\quad + x_2 [x_3, x_1] - [x_3, x_1] x_2 - [x_2, [x_3, x_1]] \\ &\quad + x_3 [x_1, x_2] - [x_1, x_2] x_3 - [x_3, [x_1, x_2]]) q, \end{aligned}$$

waarbij voor het verdwijnen van $[x_1, [x_2, x_3]] + \dots$ gebruik is gemaakt van Jacobi. De verkregen uitdrukking behoort inderdaad tot R_{m-1} .

Tenslotte $W_{a,b}$ met $|a-b| > 1$, waarbij gemakshalve $i_a=1, i_{a+1}=2, i_b=3, i_{b+1}=4$ is gesteld,

$$z = px_1 x_2 q x_3 x_4 r,$$

$$\begin{aligned}
Q_{W_{ab}} z &= px_1 x_2 q[x_3, x_4]r + p[x_1, x_2]qx_4 x_3 r \\
&+ px_2 x_1 q[x_4, x_3]r + p[x_2, x_1]qx_3 x_4 r \\
&= p(x_1 x_2 - x_2 x_1)q[x_3, x_4]r + p[x_2, x_1]q(x_3 x_4 - x_4 x_3)r \\
&= p(x_1 x_2 - x_2 x_1 - [x_1, x_2])q[x_3, x_4]r + \\
&\quad + p[x_2, x_1]q(x_3 x_4 - x_4 x_3 - [x_3, x_4])r \\
&\in R_{m-1}.
\end{aligned}$$

Dit voltooit het bewijs van de hulpstelling.

Men toont gemakkelijk aan: Elke lin. afbeelding φ van de Lie-algebra Γ in een associatieve algebra F , waarbij $\varphi[x, y] = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$ is, kan via de inbedding van Γ in E geschieden (gevolgd door een homomorfisme van E in F); en de omhullende associatieve algebra van Γ is door deze eigenschap gekarakteriseerd.

73. Zij Γ een halfenkelvoudige Lie-algebra, ingebed in zijn omhullende E . Zij $a_1, \dots, a_r$ een basis van Γ en $a^1, \dots, a^r$ een correlaatbasis t.a.v. de (niet-ontaarde) Killing-Cartan-vorm, dus

$$\begin{aligned}
sp(\tilde{a}^i \tilde{a}_j) &= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\
z &= \sum_i a^i a_i
\end{aligned}$$

heet het Casimir-element van E . Dit is onafhankelijk van de keuze van basis. Immers, zij b^i en b_i gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
b^i &= \sum_p \gamma_p^i a^p, \\
\sum_q \gamma_j^q b_q &= a_j
\end{aligned}$$

(met $\det \gamma \neq 0$).

Men ga over tot de geadjungeerden, vermenigvuldigheid onder elkaar staande met elkaar en neme een spoor:

$$\sum_q \gamma_j^q sp \tilde{b}^i \tilde{b}_q = \sum_p \gamma_p^i sp \tilde{a}^p \tilde{a}_j = \gamma_j^i,$$

dus

$$sp \tilde{b}^i \tilde{b}_q = \begin{cases} 1 & i=q \\ 0 & i \neq q \end{cases},$$

zodat de b^i , b_i weer correlaatbases vormen. Nu is inderdaad

$$\sum_i b^i b_i = \sum_{p,i} \gamma_p^i a^p b_i = \sum_p a^p a_p.$$

Stelling: Het Casimir-element ligt in het centrum van E .

Bewijs: We behoeven alleen aan te tonen, dat z met elk element van Γ commuteert.

$$\sum_j \text{sp}(\tilde{a}^1 \tilde{a}_j) a^j = a^1,$$

dus voor elke $x \in \Gamma$

$$\sum_j \text{sp}(\tilde{x} \tilde{a}_j) a^j = x \quad (*)$$

$$\sum_j \text{sp}(\widetilde{[c, a^1]} \tilde{a}_j) a^j = [c, a^1]$$

$$\sum_{j,i} \text{sp}(\widetilde{[c, a^1]} \tilde{a}_j) a^j a_i = \sum_i [c, a^1] a_i$$

en analoog

$$\sum_{j,i} \text{sp}(\tilde{a}^1 [\widetilde{ca}_j]) a^j a_i = \sum_i a^1 [c, a_i] .$$

Optellen geeft links 0 wegens de invariantie van de Killing-Cartan-vorm bij de geadjungeerde groep, terwijl rechts

$$\begin{aligned} \sum [c, a^1] a_i + \sum a^1 [c, a_i] &= \sum (ca^1 a_i - a^1 ca_i + a^1 ca_i - a^1 a_i c) \\ &= cz - zc, \end{aligned}$$

staat, hetgeen dus verdwijnt.

Opmerking: Uit (*) volgt

$$\text{sp}(\tilde{x} \tilde{y}) = \sum_i \text{sp}(\tilde{x} \tilde{a}_i) \text{sp}(\tilde{y} \tilde{a}^1).$$

Vormen h^1, h_i een paar basis-correlaatbasis voor θ , dan vormen $h^1, e_{-\alpha}$ resp. h_i, e_{α} er één voor Γ .

$$\text{sp}(\tilde{h} \tilde{h}') = \sum_i \text{sp}(\tilde{h} \tilde{h}_i) \text{sp}(\tilde{h}' \tilde{h}^1),$$

dus met

$$\zeta h = \alpha, \quad \zeta h' = \alpha'$$

(zie 45)

$$(\alpha, \alpha') = \sum_i \alpha(h_i) \alpha'(h^1),$$

waarbij dan α, α' willekeurig in θ^* kunnen worden gekozen.

74. We willen nu eindig-dimensionale lin. voorstellingen van Lie-algebra's Γ onderzoeken met algebraïsche middelen. We beperken ons dus tot irreducibele, gezien de stelling van de volledige reducibiliteit (die transcendent is bewezen, maar waarvoor ook algebraïsche bewijzen bestaan).

Voorlopig kunnen we ook oneindig-dimensionale voorstellingen toelaten. Voor de elementen van Γ gebruiken we kleine letters ($h, e, \text{enz.}$), voor de corresponderende lin. afbeeldingen (van R in zichzelf) de corresponderende hoofdletters ($H, E, \text{enz.}$).

Is er een $x \in R$, $x \neq 0$ zodat

$$Hx = \lambda(h)x \quad (\lambda \text{ lineair in } h \in \theta),$$

dan heet λ gewicht van de voorstelling, x "behoort" tot het gewicht λ . Is R eindig-dimensionaal, dan zijn er zeker gewichten (gezien de oplosbaarheid van θ).

$$HE_{\alpha}x = [H, E_{\alpha}]x + E_{\alpha}Hx = \alpha(h)E_{\alpha}x + \lambda(h)E_{\alpha}x.$$

Dus: als x tot het gewicht λ behoort, behoort $E_{\alpha}x$ tot het gewicht $\lambda + \alpha$ of verdwijnt.

De gewichten kunnen in α -ladders worden gerangschikt

$$\dots \lambda - \alpha, \lambda, \lambda + \alpha, \dots$$

Zij x , behorende bij het gewicht λ , zo dat

$$E_{-\alpha}x = 0$$

is. (Dit is vanzelf het geval als $\lambda - \alpha$ niet gewicht is.) Definieer

$$E_{\alpha}^j x = x_j.$$

Dan hoort x_j bij het gewicht $\lambda + j\alpha$ (of is nul).

We bewijzen inductief: er zijn scalairen ρ_j met

$$E_{\alpha} x_{j+1} = \rho_j x_j.$$

Dit is juist voor $j=-1$, waarbij $\rho_{-1}=0$ wordt gesteld. We nemen de geldigheid aan en doen de volgende inductiestap:

$$\begin{aligned} E_{-\alpha} x_{j+2} &= E_{-\alpha} E_{\alpha} x_{j+1} = [E_{-\alpha}, E_{\alpha}] x_{j+1} + E_{\alpha} E_{-\alpha} x_{j+1} = -H_{\alpha} x_{j+1} + \rho_j E_{\alpha} x_{j+1} \\ &= (\lambda + (j+1)\alpha)(h_{\alpha}) x_{j+1} + \rho_j x_{j+1}. \end{aligned}$$

Voor ρ_{j+1} wordt verkregen

$$\rho_{j+1} = \rho_j - (\lambda + (j+1)\alpha)(h_{\alpha}).$$

Sommeren van deze vergelijkingen ($j=-1, 0, \dots, i-1$) geeft

$$\begin{aligned} \rho_i &= - \sum_0^i (\lambda + j\alpha)(h_{\alpha}) \\ &= -(i+1)(\lambda + \frac{1}{2}i\alpha)(h_{\alpha}). \end{aligned}$$

Is de ladder van x_i -en eindig, van de lengte g , dus $x_g \neq 0$, $x_{g+1} = 0$,

dan is $p_g=0$, dus

$$g = -2 \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

75. Naar aanleiding van het voorafgaande noemen we een element ξ van Θ^* geheel, indien

$$-2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \text{ geheel voor elke } \alpha \in W$$

is.

We kunnen trouwens volstaan met de eis

$$-2 \frac{(\xi, \rho)}{(\rho, \rho)} \text{ geheel voor elke } \rho \in P$$

(waar P weer een systeem primitieve wortelvormen is). Immers uit het laatste volgt (zie 44 en 67): ξ en $S_\rho \xi$ schelen een geheel veelvoud van ρ ; dus voor elke S uit de kaleidoskoopgroep: ξ en $S\xi$ schelen een lineaire combinatie met gehele coëfficiënten uit wortelvormen; in het bijzonder is $S_\alpha \xi - \xi = -2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$ zulk een combinatie, dus inderdaad

$$-2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

geheel.

Alle wortelvormen zijn geheel.

Is het aantal gewichten van de vorm $\xi + p\alpha$ (vaste $\alpha \in W$, p geheel variabel) eindig, dan zijn zij geheel (zie 74).

In het bijzonder heeft een eindig dimensionale voorstelling alleen gehele gewichten.

Als elementen van Θ^* zijn de gewichten bij de (lexicografische) orde in Θ^* betrokken. Speciaal interessant is het geval van existentie van een hoogste gewicht.

76. Als een lineaire voorstelling van Γ in R gegeven is en $x \in R$ de eigenschap bezit, dat de kleinste bij Γ invariante deelruimte van R , die x bevat, met R samenvalt, zullen we x een bron van R (bij die voorstelling) noemen;

Is x bron van R en vormen de $A_1, \dots, A_r$ een basis der voorstelling van Γ , dan wordt R opgespannen door de producten der A_i (in willekeurige volgorde, met herhaling), toegepast op x .

Als basis kan men in het bijzonder de E_α plus een basis $H_1, \dots, H_l$ der voorstelling van Θ nemen. Men kan dan volstaan met de producten

der vorm

$$E_{-\alpha_1}^{i_1} \dots E_{-\alpha_m}^{i_m} E_{\alpha_1}^{j_1} \dots E_{\alpha_m}^{j_m} H_1^{k_1} \dots H_l^{k_l} x, \quad (*)$$

waar $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de positieve wortelvormen (in gegeven volgorde) zijn.

Immers, waar twee basiselementen A, B elkaar verkeerd opvolgen (BA i.p.v. AB), kan men voor BA substitueren $AB + [B, A]$ en zodoende successievelijk orde scheppen.

Behoort de bron x tot een gewicht λ , dan kan men in (*) de factoren H missen, omdat $H_i x = \lambda(h_i)x$ is.

Behoort de bron x tot het hoogste gewicht (indien existent), dan kan men zelfs de E_{α_i} missen, omdat $E_{\alpha_i} x$ wegens $\alpha_i > 0$, indien $\neq 0$, van hoger gewicht zou zijn. Bij elk α_i gewicht horen dan slechts eindig veel lineair onafhankelijke vectoren.

Is er een bron van het gewicht λ , dan verschillen alle gewichten μ van λ met een som van wortelvormen. Is er een bron met een geheel gewicht, dan zijn alle gewichten geheel.

77. Als het hoogste gewicht bestaat en geheel is en bij het hoogste gewicht een bron x van R behoort, dan verdwijnen voor elk $y \in R$, behorende tot een gewicht, en elke positieve wortelvorm bijna alle $E_{-\alpha}^N y$.

Bewijs. Het is voldoende dit te bewijzen voor een y der vorm

$$y = E_{-\alpha_1}^{i_1} \dots E_{-\alpha_m}^{i_m} x.$$

Het bewijs kan inductief geschieden: Stel voor zekere $\alpha > 0$ en zekere N

$$E_{-\alpha}^N y = 0;$$

dan voor $\beta > 0$ ook

$$E_{-\alpha}^{N+3} E_{-\beta} y = 0.$$

Want

$$\begin{aligned} E_{-\alpha}^{N+3} E_{-\beta} y &= E_{-\alpha}^{N+2} E_{-\beta} E_{-\alpha} y + E_{-\alpha}^{N+1} E_{-\beta-\alpha} y = \dots = \\ &= E_{-\beta} E_{-\alpha}^{N+3} y + \dots E_{-\beta-\alpha} E_{-\alpha}^{N+2} y + \dots E_{-\beta-2\alpha} E_{-\alpha}^{N+1} y + \\ &\quad + \dots E_{-\beta-3\alpha} E_{-\alpha}^N y = 0 \end{aligned}$$

(coëfficiënten zijn door stippen aangeduid; denk erom dat $\beta + 4\alpha$ niet meer wortelvorm kan zijn!)

78. Stelling: Bezit de voorstelling een hoogste gewicht $\hat{\lambda}$, is $\hat{\lambda}$ geheel en hoort bij $\hat{\lambda}$ een bron van R , dan is de voorstelling irreducibel en eindig-dimensionaal, en dan treden met elk gewicht al zijn equivalenten ook als gewicht op: de op een "rechte" $\xi + p\alpha$ (p variabel, $\alpha \in W$ vast) liggende gewichten vormen dan een α -ladder, die door S_α ondersteboven wordt gedraaid.

Bewijs: Zij $\alpha > 0$. Wegens het bestaan van een hoogste gewicht in het geheel is er ook op de rechte $\xi + p\alpha$ een hoogste gewicht λ (dus met p maximaal), waarbij een vector y hoort. Volgens 77 breekt de rij $E_{-\alpha}^i y$ af, volgens 74 is $S_{-\alpha} \lambda = \lambda - p'\alpha$ ook gewicht. Zij $\mu = \lambda - p''\alpha$ enig gewicht op die rechte. Dan is $p'' \geq 0$. Zij y' een vector horende bij $\lambda - p''\alpha$. Dan is er volgens 77 een m met $y'' = E_{-\alpha}^m y' \neq 0$, $E_{-\alpha} y'' = 0$. y'' hoort bij het gewicht $\lambda - (p'' + m)\alpha$. Volgens 74 is $S_\alpha(\lambda - (p'' + m)\alpha)$ ook gewicht. Nu is $S_\alpha = S_{-\alpha}$. Dus $S_\alpha(\lambda - (p'' + m)\alpha) = S_{-\alpha} \lambda - (p'' + m)S_\alpha \alpha = \lambda - p'\alpha + (p'' + m)\alpha$. Dit gewicht kan λ niet overtreffen, dus $p' \geq p'' + m \geq m$. Dus ligt μ tussen λ en $S_\alpha \lambda$; daar μ en λ van $\tilde{\lambda}$ een som van wortelvormen schelen, schelen ze onderling een geheel veelvoud van α . Dus vormen de op de rechte liggende gewichten een α -ladder, die door S_α ondersteboven wordt gedraaid. Met elke μ treedt $S_\alpha \mu$ als gewicht op, dus ook elk element van θ^* , dat met μ equivalent is.

We tonen nu de irreducibiliteit van de voorstelling aan: Zij S een invariante deelruimte. Een $y \neq 0$ uit S kan als

$$y = \sum y_\lambda$$

worden geschreven met summanden y_λ behorende bij (verschillende) gewichten λ . We kiezen $h \in \theta$ zo dat alle $\lambda(h)$ (voor alle in de som optredende y_λ) verschillend zijn. Uit voldoende veel

$$H^1 y = \sum \lambda(h)^1 y_\lambda$$

kan men de afzonderlijke y_λ lineair combineren. Dus is er in S ook een element y horende bij een gewicht. We kiezen $y \in S$ zo dat het bij een zo hoog mogelijk gewicht λ behoort. Daar $E_\alpha y \in S$ en $\lambda + \alpha$ voor $\alpha > 0$ niet gewicht van een element van S is, is dan

$$E_\alpha y = 0 \quad \text{voor alle } \alpha > 0.$$

Aan het Casimir -element z der omhullende algebra van Γ beantwoordt bij de voorstelling een lineaire afbeelding Z van R in zichzelf,

$$Z = \sum_\alpha E_{-\alpha} E_\alpha + \sum_i H^1 H_i$$

(H^1, H_1 beantwoorden aan de h^1, h_1 van gecorreleerde bases van $\mathfrak{g}$).
We passen Z toe op een y , behorende bij het gewicht λ , met

$$E_{\alpha} y = 0 \quad \text{voor alle } \alpha > 0.$$

Dan is

$$\begin{aligned} Zy &= \sum_{\alpha > 0} (E_{-\alpha} E_{\alpha} + E_{\alpha} E_{-\alpha}) y + \sum_i H^1_i H_{i1} y \\ &= \sum_{\alpha > 0} (2E_{-\alpha} E_{\alpha} + H_{\alpha}) y + \sum \lambda(h^1) \lambda(h_1) y \\ &= \sum_{\alpha > 0} (\lambda, \alpha) y + (\lambda, \lambda) y \\ &= ((\lambda, 2\sigma) + (\lambda, \lambda)) y = ((\lambda + \sigma, \lambda + \sigma) - (\sigma, \sigma)) y, \end{aligned}$$

indien gesteld is

$$\sum_{\alpha > 0} \alpha = 2\sigma.$$

Daar x bron van R is, is

$$y = Ux$$

voor zekere U , die bij de voorstelling beantwoordt aan een element u van de Γ omhullende algebra. Wegens $ZU = UZ$ en

$$Zx = ((\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma) - (\sigma, \sigma)) x$$

moet dus

$$(\lambda + \sigma, \lambda + \sigma) = (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma)$$

zijn.

In 79 zullen we aantonen, dat onder de hier gemaakte veronderstellingen

$$(\lambda + \sigma, \lambda + \sigma) < (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma)$$

tenzij $\lambda = \hat{\lambda}$ is. Maar dan is y scalair veelvoud van x , dus $S=R$. Hieruit volgt de irreducibiliteit.

Daar de gewichten geheel zijn kunnen ze zich niet verdichten. Er kunnen dus slechts eindig veel gewichten λ zijn met

$$(\lambda + \sigma, \lambda + \sigma) < (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma).$$

Bij elk gewicht horen slechts eindig veel onafhankelijke vectoren. Dus is $\dim R$ eindig.

Hiermede is de stelling volledig bewezen.

79. Zij $p \in P$. Dan verwisselt S_p de $\pm p$ onderling en de overige positieve (negatieve) wortelvormen onderling. Want $\alpha > 0$, $S_p \alpha < 0$ zou betekenen dat in de $(-p)$ -ladder van α naar $S_p \alpha$ een stap $\alpha - p \cdot p > 0$, $\alpha - (p+1)p < 0$ zou zijn; maar dan was $p = (\alpha - p \cdot p) + (p+1)p - \alpha$ som van

twee positieve wortelvormen, dus $\notin P$.

Daar 2δ de som der positieve wortelvormen was, is dus

$$S_p 2\delta = 2\delta - 2\rho,$$

dus

$$2 \frac{(2\delta, \rho)}{(\rho, \rho)} = 2,$$

dus

$$2 \frac{(\delta, \rho)}{(\rho, \rho)} = 1 \quad \text{voor alle } \rho \in P.$$

Derhalve is δ een geheel element van θ^* .

In het bijzonder is $(\delta, \rho) > 0$ voor $\rho \in P$, dus

$$(\delta, \alpha) > 0 \quad \text{voor positieve } \alpha \in W.$$

δ is dus dominant.

Stelling: Onder de veronderstellingen van 78 geldt

$$(\lambda + \delta, \lambda + \delta) < (\hat{\lambda} + \delta, \hat{\lambda} + \delta)$$

voor alle gewichten $\lambda \neq \hat{\lambda}$.

Bewijs: Zij $\mu = \lambda + p\alpha$ het hoogste gewicht van de λ bevattende α -ladder. In 78 was reeds aangetoond, dat λ tussen μ en $S_\alpha \mu$ ligt, dus

$$2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq p.$$

$$\begin{aligned} & (\mu + \delta, \mu + \delta) - (\lambda + \delta, \lambda + \delta) = \\ & = 2p(\mu + \delta, \alpha) - p^2(\alpha, \alpha) \geq 2p(\delta, \alpha) > 0. \end{aligned}$$

Inductief concludeert men hieruit het gewenste.

80. Voor het hoogste gewicht van een eindig-dimensionale lineaire voorstelling komen alleen gehele dominante elementen van θ^* in aanmerking. We construeren nu bij een gegeven geheel dominant element $\hat{\lambda}$ van θ een irreducibele voorstelling, waarvan $\hat{\lambda}$ hoogste gewicht is.

De bij $\hat{\lambda}$ horende vector x moet door $E_\alpha (\alpha > 0)$ en $H - \hat{\lambda}(h)$ worden geannuleerd. Het ligt voor de hand, om de te construeren ruimte R als lineair beeld van de omhullende algebra E van Γ op te vatten en het door de $e_\alpha (\alpha > 0)$ en de $h - \hat{\lambda}(h)$ ($h \in \theta$) voortgebrachte links-ideaal M als O van de ruimte R . Anders gezegd: we definiëren

$$R = E \bmod M;$$

aan het element $a \in \Gamma$ is door de voorstelling f de afbeelding A van R in zichzelf met

$$A(u+M) = au + M$$

toegevoegd (u doorloopt E). Omdat M linksideaal (dus $vM \subset M$) is, is dat een voorstelling van Γ . Het element $1+M$ van R is bron. Wegens $-1 \notin M$ (zie 72) is $1+M$ niet de nul van R . Wegens $h - \hat{\lambda}(h) \in M$ (voor alle $h \in \theta$) behoort $1+M$ tot het gewicht $\hat{\lambda}$. Wegens $e_\alpha \in M$ ($\alpha > 0$) wordt het door deze e_α geannuleerd, dus is $\hat{\lambda}$ hoogste gewicht. Uit 78 volgt, dat $\dim R$ eindig en de voorstelling f irreducibel is.

We laten nu zien, dat een irreducibele voorstelling met een hoogste gewicht $\hat{\lambda}$, dat geheel is, door dit hoogste gewicht in wezen eenduidig bepaald is.

Zij namelijk f^* een irreducibele lineaire voorstelling met hetzelfde hoogste gewicht $\hat{\lambda}$, in een lineaire ruimte R^* en zij x^* een vector horende bij het hoogste gewicht. f^* kan worden uitgebreid tot een homomorfisme van E in de algebra der lineaire afbeeldingen van R in zichzelf. Daar x^* bij het hoogste gewicht $\hat{\lambda}$ hoort, is $f^*(e_\alpha)x^* = f^*(h - \hat{\lambda}(h))x^* = 0$ voor $\alpha > 0$ en $h \in \theta$, dus ook $f^*(M)x^* = (0)$. We definiëren een afbeelding φ van R in R^* door

$$\varphi(u+M) = (f^*u)x^* \quad \text{voor alle } u \in E$$

(inderdaad is $\varphi(M)=0$). φ is lineair. We tonen aan

$$\varphi(fa) = (f^*a)\varphi \quad \text{voor } a \in \Gamma : \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \varphi(fa)(u+M) &= \varphi(au+M) = (f^*(au))x^* = (f^*a)(f^*u)x^* \\ &= ((f^*a)\varphi)(u+M), \end{aligned}$$

waaruit (*) volgt.

φ is 1-1 en op, want wegens (*) is de nulruimte en de beeldruimte van φ invariante deelruimte van R resp. R^* , terwijl $\varphi(1+M)=x^*$, dus φ niet identiek nul is. Hieruit volgt dat φ een equivalentie tussen f en f^* bemiddelt.

We hebben dus de

Stelling: 1. Een eindig-dimensionale irreducibele lineaire voorstelling van een halfenkelvoudige Lie-algebra is door zijn hoogste gewicht $\hat{\lambda}$ op equivalentie na bepaald; tussen twee met hetzelfde hoogste gewicht kan men de equivalentie zo tot stand brengen, dat vectoren met hetzelfde gewicht aan elkaar beantwoorden. 2. Elk geheel dominant element van θ kan als hoogste gewicht optreden.

3. Met elk gewicht treden alle equivalente als gewicht op, en wel met dezelfde multipliciteit. Het hoogste gewicht heeft de multipliciteit 1. 4. Met elk gewicht λ treden als gewichten op alle $\lambda + p\alpha$ met p geheel $\leq -2 \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ ($\alpha \in W$). De verzameling der gewichten is erdoor gekenmerkt, dat zij het hoogste gewicht bevat en met elke ξ ook alle $\xi - p\alpha$, waarbij α een positieve wortelvorm en p geheel $\leq 2 \frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ is. 5. Voor elk gewicht $\lambda \neq \hat{\lambda}$ geldt $(\lambda + \delta, \lambda + \delta) < (\hat{\lambda} + \delta, \hat{\lambda} + \delta)$. 6. Een dominant element ξ van θ^* is dan en slechts dan gewicht, als $\hat{\lambda} - \xi$ som is van positieve wortelvormen.

Van 3 moeten we de aanvulling nog bewijzen en van 6 het gedeelte "dan". We beginnen met het laatste:

Zij ξ dominant en $\xi + \sum p_i \rho_i$ (ρ_i irreducibel, p_i geheel ≥ 0) een gewicht; we bewijzen, dat ook ξ gewicht is.

We mogen veronderstellen $\sum p_i \rho_i \neq 0$. Wegens

$$(\sum p_i \rho_i, \sum p_j \rho_j) > 0$$

is er een j met

$$(\sum p_i \rho_i, \rho_j) > 0.$$

Dus

$$p_j > 0, (\sum p_i \rho_i, \rho_j) > 0,$$

$$(\xi + \sum p_i \rho_i, \rho_j) = (\xi, \rho_j) + (\sum p_i \rho_i, \rho_j) > 0.$$

Dus is

$$\xi + \sum p_i \rho_i - \rho_j \text{ gewicht.}$$

Op deze wijze doorgaande daalt men af naar ξ .

We bewijzen nu de aanvulling op 3: Zij S een automorfisme van het systeem W . Dit kan als lineaire afbeelding op θ^* worden uitgebreid (zie 47). Verder hoort bij S een automorfisme van Γ (ook S genaamd), zodat

$$Sh_\alpha = h_{S\alpha}, \quad Se_\alpha = e_{S\alpha}.$$

S toegepast op

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha \quad (h \in \theta)$$

geeft

$$[Sh, e_{S\alpha}] = \alpha(h)e_{S\alpha},$$

dus

$$[h, e_{S\alpha}] = \alpha(S^{-1}h)e_{S\alpha}.$$

Dus is

$$(S\alpha)(h) = \alpha(S^{-1}h).$$

Algemeen voor $\xi \in \theta^*$

$$(S\xi)(h) = \xi(S^{-1}h).$$

Zij (voor een gewicht λ en een voorstelling f van Γ)

$R_{\lambda, f}$ de ruimte van vectoren horende bij het gewicht λ .

Is $a \rightarrow f_a \quad (a \in \Gamma)$

een irreducibele voorstelling van Γ in R ($\dim R$ eindig), dan geldt hetzelfde voor g gedefinieerd door

$$g_a = f_{Sa}.$$

Voor $x \in R_{\lambda, f}$ is

$$f_h x = \lambda(h)x,$$

dus wegens

$$g_h x = f_{Sh} x = \lambda(Sh)x = ((S\lambda)(h))x,$$

$x \in R_{S\lambda, g}$, dus $R_{\lambda, f} \subset R_{S\lambda, g}$ en om symmetrie-redenen

$$R_{\lambda, f} = R_{S\lambda, g}.$$

Is $S \in K$, dan is met $S\lambda$ ook λ gewicht van g ; en analoog omgekeerd. Dus hebben f en g dezelfde gewichten. Er is dus een equivalentie tussen f en g , waarbij vectoren van R van hetzelfde gewicht aan elkaar beantwoorden, dus

$$\dim R_{S\lambda, f} = \dim R_{S\lambda, g}.$$

Dus ook

$$\dim R_{S\lambda, f} = \dim R_{\lambda, f},$$

en dit is de gelijkheid van multipliciteit bij equivalente gewichten.

81. Van bijzonder belang zijn de 1 fundamentele hoogste gewichten π_i (en de bijbehorende irreducibele voorstellingen f_i) gedefinieerd door

$$2 \frac{(\pi_i, \rho_j)}{(\rho_j, \rho_j)} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}.$$

Elk hoogste gewicht kan (op één wijze) als som van fundamentele worden geschreven.

Merk op:

$$\delta = \sum \pi_i.$$

Uit twee lin. voorstellingen f en g van een groep in ruimten R resp. S kan men door Kronecker-productvorming een voorstelling in $R \times S$ construeren. Als $x_1, \dots, x_m$ resp. $y_1, \dots, y_n$ bases van R en S zijn, vormen de formele producten $x_i y_j$ een basis van $R \times S$ en men definieert

$$((f \times g)(a))(x_i y_j) = f(a)x_i \times g(a)y_j.$$

Gaat het om voorstellingen van de bijbehorende infinitesimale Lie-algebra's, dan moet men definiëren:

$$((f \times g)(A))(x_i y_j) = (f(A)x_i) \times y_j + x_i \times (g(A)y_j).$$

Horen x_i resp. y_j bij de gewichten λ_i resp. μ_j , dan hoort $x_i y_j$ bij het gewicht $\lambda_i + \mu_j$. Het hoogste gewicht van $f \times g$ is dus de som der hoogste gewichten van f en g . Merk op, dat uit de irreducibiliteit van f en g over het algemeen niet die van $f \times g$ volgt; de vector van het hoogste gewicht in $f \times g$ is bron van een irreducibele voorstelling.

In het verband met het in het begin van dit nummer gezegde blijkt:

Stelling: Alle irreducibele lineaire voorstellingen van een halfenkelvoudige Lie-algebra worden verkregen als de irreducibele delen van Kronecker-producten van fundamentele voorstellingen, waarvan de vector van het hoogste gewicht de bron is.

82. Voor de vier grote klassen van enkelvoudige Lie-algebra's geven we de fundamentele hoogste gewichten aan. Als coördinatenstelsel in θ bezigen we hetzelfde als in 27-30. De primitieve wortelvormen en de bijbehorende fundamentele voorstellingen worden overeenkomstig 57 genummerd.

α_1 : De ω_i waren $l+1$ lineaire functionelen op θ met

$$\sum \omega_i(h) = 0 \quad \text{voor } h \in \theta.$$

Het is prettig, om met dit overtallig stelsel i.p.v. met een basis te werken en inproducten

$$(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$$

te definiëren. Voor een element ξ van θ^* zijn de p_i in

$$\xi = \sum p_i \omega_i$$

niet eenduidig bepaald, maar op een gemeenschappelijke summand na.
Is nog

$$\sum p_i = 0,$$

dan noemen we de uitdrukking voor ξ gereduceerd.

Het inproduct van

$$\xi = \sum p_i \omega_i, \quad \eta = \sum q_j \omega_j$$

is door

$$(\xi, \eta) = \sum p_i q_i$$

eenduidig bepaald, indien een der factoren in gereduceerde vorm wordt aangenomen. Voor primitieve wortelvormen krijgt men

$$(\omega_i - \omega_{i+1}, \omega_j - \omega_{j+1}) = \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{voor} \quad \begin{matrix} i=j \\ |i-j|=1 \\ |i-j|>1 \end{matrix}$$

dus op een normeringsfactor na het vereiste.

Gehele elementen $\xi = \sum p_i \omega_i$ horen te voldoen aan

$$\frac{2(\sum p_i \omega_i, \omega_j - \omega_{j+1})}{(\omega_j - \omega_{j+1}, \omega_j - \omega_{j+1})} \text{ geheel,}$$

dus aan

$$p_i \equiv p_j \pmod{1}.$$

Dominantie vereist

$$\frac{2(\sum p_i \omega_i, \omega_j - \omega_{j+1})}{(\omega_j - \omega_{j+1}, \omega_j - \omega_{j+1})} \geq 0,$$

dus

$$p_j \geq p_{j+1} \quad (j=1, \dots, l).$$

Fundamentele hoogste gewichten:

$$\pi_1 = \omega_1$$

$$\pi_2 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\vdots$$

$$\pi_l = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_l = -\omega_{l+1}.$$

De bijbehorende voorstellingen worden ook door π_i aangeduid.

In de R_{l+1} is α_l op de gebruikelijke wijze voorgesteld. Dan hoort de basisvector x_i bij het gewicht ω_i . De voorstelling heeft het hoogste gewicht π_1 .

Men neme nu twee exemplaren van R_{l+1} met bases $x_1, \dots, x_{l+1}$ resp. $y_1, \dots, y_{l+1}$. Het Kroneckerproduct van beide kan in twee invariante deelruimten worden gesplitst, het symmetrische deel met basiselementen $x_i y_j + x_j y_i$ en het antisymmetrische met basiselementen $x_i y_j - x_j y_i$ (hier $i \neq j$). Van het symmetrische is $2\pi_1$, behorende bij $x_1 y_1$ het hoogste gewicht; voor het antisymmetrische deel is het $\pi_2 = \omega_1 + \omega_2$ behorende bij $x_1 y_2 - x_2 y_1$.

π_2 is dus de door π_1 in de ruimte der antisymmetrische 2-tensoren van R_{l+1} geïnduceerde voorstelling. Zij houdt nauw verband met de variëteit der rechten in de projectieve l -ruimte (Plücker-coördinaten).

Analoog wordt π_k door π_1 in de ruimte der antisymmetrische k -tensoren geïnduceerd. (k -vlakken van de projectieve l -ruimte.)

π_i en π_{l+1-i} zijn, hoewel "dezelfde" groepen niet equivalent. Ze worden door een uitwendig automorfisme (projectieve dualiteit) met elkaar geïdentificeerd.

$\mathcal{L}_1$: De l lineaire functionelen ω_i op θ hebben de inproducten (op een normeringsfactor na):

$$(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}.$$

De primitieve wortelvormen zijn (in de orde van 57):

$$\omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{l-1} - \omega_l.$$

Gehele $\xi = \sum p_i \omega_i$ moeten voldoen aan

$$2p_1, \quad p_i - p_{i+1} \text{ geheel.}$$

Voor dominante moet gelden

$$p_j \geq p_{j+1}.$$

Fundamentele hoogste gewichten

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \dots + \omega_l)$$

$$\pi_2 = \omega_1$$

$$\pi_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\vdots$$

$$\pi_l = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1}.$$

π_2 hoort bij de gewone voorstelling van $\mathcal{L}_1$ (zie 28), en de voorstellingen bij π_i ($i > 2$) worden weer als in het geval van de α_1 verkregen, met de analoge meetkundige interpretatie.

Wat π_1 betekent zal in 89 blijken.

$\mathcal{L}_1$: Inproduct als bij $\mathcal{L}_1$. Primitieve wortelvormen:

$$\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{l-1} - \omega_l, {}^2\omega_1.$$

Gehele $\xi = \sum p_i \omega_i$:
 p_i geheel.

Dominante:

$$p_i \geq p_{i+1}.$$

Fundamentele hoogste gewichten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \omega_1 \\ \pi_2 &= \omega_1 + \omega_2 \\ &\vdots \\ \pi_l &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_l. \end{aligned}$$

Interpretatie als bij α_1 .

$\mathcal{V}_1$: Inproduct als bij $\mathcal{L}_1$. Primitieve wortelvormen:

$$\omega_{l-1} - \omega_l, \omega_{l-1} + \omega_l, \omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \dots, \omega_{l-2} - \omega_{l-1}.$$

Gehele $\xi = \sum p_i \omega_i$:
 $p_i - p_{i+1}, p_{l-1} + p_l$ geheel,

d.w.z.

$$2p_i \equiv p_i - p_j \equiv 0 \pmod{1}.$$

Dominante:

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{l-1} \geq |p_l|.$$

Fundamentele hoogste gewichten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1} - \omega_l) \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1} + \omega_l) \\ \pi_3 &= \omega_1 \\ \pi_4 &= \omega_1 + \omega_2 \\ &\vdots \\ \pi_l &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-2}. \end{aligned}$$

De interpretatie van $\pi_3, \dots, \pi_l$ geeft geen moeilijkheden. Op π_1, π_2 komen we in 89 terug.

83. We geven nog de kaleidoskoopgroepen aan.

$$\alpha_1: S_{\rho_1} \omega_j = \omega_j \text{ voor } j \neq 1, i+1,$$

$$S_{\rho_1} \omega_i = \omega_{i+1},$$

$$S_{\rho_1} \omega_{i+1} = \omega_i.$$

Deze afbeeldingen brengen de symmetrische groep der $\omega_1, \dots, \omega_{l+1}$ voort.

$$\mathcal{L}_1: S_{\rho_1} \omega_i = \omega_i \text{ voor } i \neq 1,$$

$$S_{\rho_1} \omega_1 = -\omega_1,$$

$$S_{\rho_i} \text{ (voor } i \neq 1) \text{ als boven.}$$

Het algemeen element der kaleidoskoopgroep is product van een permutatie der $\omega_1, \dots, \omega_l$ en een "spiegeling" $\omega_1 \rightarrow \pm \omega_1, \dots, \omega_l \rightarrow \pm \omega_l$

$$\mathcal{L}_1: S_{\rho_i} \text{ voor } i \neq 1 \text{ als boven,}$$

$$S_{\rho_1} \omega_i = \omega_i \text{ voor } i \neq 1,$$

$$S_{\rho_1} \omega_1 = -\omega_1.$$

Dezelfde kaleidoskoopgroep als bij $\mathcal{L}_1$.

$$\mathcal{V}_1: S_{\rho_i} \text{ voor } i \neq 2 \text{ als boven,}$$

$$S_{\rho_2} \omega_i = \omega_i \text{ voor } i \leq l-2,$$

$$S_{\rho_2} \omega_{l-1} = -\omega_{l-1},$$

$$S_{\rho_2} \omega_l = -\omega_{l-1}.$$

Het algemeen element der kaleidoskoopgroep is het product van een permutatie der $\omega_1, \dots, \omega_l$ met een spiegeling $\omega_1 \rightarrow \pm \omega_1, \dots, \omega_l \rightarrow \pm \omega_l$, waarbij echter de permutatie en het aantal mintekens der spiegeling tegelijk even of oneven moeten zijn.

84. Van halfenkelvoudige Lie-algebra's is elke irreducibele voorstelling zowel door het hoogste gewicht als door het karakter op equivalentie na bepaald. We zullen nu het karakter in het hoogste gewicht gaan uitdrukken.

We hoeven het karakter van een voorstelling alleen op e^θ te kennen. Het is iets prettiger om op θ^* te werken. Onder $\chi(\tau)$ verstaan we het spoor van e^H indien $\tau = \zeta h$ (zie 45) en aan h bij de voorstelling H beantwoordt.

$$\text{sp } e^H = \chi(\zeta h).$$

De eigenwaarden van H zijn de $\lambda(h) = (\lambda, \tau)$, elk met een multipliciteit

$$m_\lambda = \dim R_\lambda,$$

waar R_λ de deelruimte van R is, bestaande uit de vectoren van het gewicht λ en uit de oorsprong. De eigenwaarden van e^H zijn de $e^{(\lambda, \tau)}$, dus

$$\chi(\tau) = \sum_\lambda m_\lambda e^{(\lambda, \tau)}.$$

85. Voor een $\alpha \in W$ stellen we

$$E_{-\alpha} E_\alpha = P, \quad E_\alpha E_{-\alpha} = Q, \quad \text{dus} \quad Q - P = H_\alpha.$$

$$PR_\lambda \subset R_\lambda, \quad E_\alpha R_\lambda \subset R_{\lambda+\alpha}, \quad QR_{\lambda+\alpha} \subset R_{\lambda+\alpha}.$$

Er is een a en een b zo dat

$$P^{a+i} R_\lambda = P^a R_\lambda = T \quad \text{voor } i > 0,$$

$$Q^{b+i} R_{\lambda+\alpha} = Q^b R_{\lambda+\alpha} = U \quad \text{voor } i > 0.$$

Dan is

$$E_\alpha T = U, \quad E_{-\alpha} U = T,$$

waaruit volgt, dat de afbeeldingen

$$E_\alpha : T \rightarrow U$$

$$E_{-\alpha} : U \rightarrow T$$

1-1 "op" zijn. Wegens

$$E_\alpha P = Q E_\alpha$$

is

$$\text{sp}_T P = \text{sp}_U Q.$$

Maar tot het spoor van P in R_λ levert alleen de deelruimte T een bijdrage; en analoog levert tot het spoor van Q in $R_{\lambda+\alpha}$ alleen U een bijdrage, dus

$$\text{sp}_{R_{\lambda+\alpha}} Q = \text{sp}_U Q = \text{sp}_T P = \text{sp}_{R_\lambda} P = \text{sp}_{R_\lambda} (Q - H_\alpha).$$

Dus

$$\text{sp}_{R_\lambda} E_\alpha E_{-\alpha} - \text{sp}_{R_{\lambda+\alpha}} E_\alpha E_{-\alpha} = m_\lambda(\lambda, \alpha).$$

Schrijft men dezelfde formule op met i.p.v. λ : $\lambda + \alpha$, $\lambda + 2\alpha$, ..., en sommeert men, dan heeft men

$$\text{sp}_{R_\lambda} E_\alpha E_{-\alpha} = \sum_{p=0}^{\infty} m_{\lambda+p\alpha}(\lambda+p\alpha, \alpha)$$

(de reeks breekt feitelijk af, daar de $m_{\lambda+p\alpha}$ op den duur verdwijnen).

We vormen de som over alle $\alpha \in W$ en tellen bovendien

$$\text{sp}_{R_\lambda} \sum H_i^1 H_i = (\lambda, \lambda) m_\lambda$$

op. Dan ontstaat het spoor van het Casimir-element

$$\text{sp}_{R_\lambda} \left(\sum_{\alpha} E_{-\alpha} E_{\alpha} + \sum H_i^1 H_i \right) = c_{\hat{\lambda}} m_\lambda,$$

waarbij

$$c_{\hat{\lambda}} = (\hat{\lambda} + \delta, \hat{\lambda} + \delta) - (\delta, \delta).$$

We krijgen dus

$$\sum_{\alpha \in W} \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda + p\alpha, \alpha) m_{\lambda+p\alpha} + (\lambda, \lambda) m_\lambda = c_{\hat{\lambda}} m_\lambda. \quad (*)$$

Men hoeft de som over p trouwens pas vanaf $p=1$ te laten lopen, omdat voor $p=0$ de aandelen afkomstig van α en $-\alpha$ tegen elkaar wegvallen.

$$\sum (\mu, \alpha) m_\mu$$

verdwijnt als de som loopt over een hele α -ladder van gewichten μ (of ook over een beiderzijds symmetrisch afgeknipte ladder), want

$$\sum (\mu, \alpha) m_\mu = \sum (S_\alpha \mu, \alpha) m_{S_\alpha \mu} = \sum (\mu, S_\alpha \alpha) m_\mu = - \sum (\mu, \alpha) m_\mu.$$

In het bijzonder verdwijnt de som over p in $(*)$, als λ geen gewicht is; $(*)$ blijft dus dan ook juist (met $m_\lambda = 0$).

We kunnen nu in $(*)$ de bijdragen van $\pm\alpha$ samenvatten:

$$\sum_{\alpha > 0} (\lambda, \alpha) m_\lambda + 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda + p\alpha, \alpha) m_{\lambda+p\alpha} + (\lambda, \lambda) m_\lambda = c_{\hat{\lambda}} m_\lambda.$$

De eerste en derde summand samen geven

$$(\lambda, \lambda + 2\delta) m_\lambda = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta) m_\lambda = c_\lambda m_\lambda,$$

dus

$$2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda + p\alpha, \alpha) m_{\lambda+p\alpha} = (c_{\hat{\lambda}} - c_\lambda) m_\lambda.$$

Met deze formule kan men de multipliciteiten recursief afdalend uitrekenen, te beginnen bij $m_{\hat{\lambda}}=1$ en $m_{\lambda}=0$ voor $\lambda > \hat{\lambda}$. Links staan namelijk alleen multipliciteiten van gewichten $> \lambda$; van de coëfficiënt rechts weten wij, dat hij voor gewichten $\lambda \neq \hat{\lambda}$ niet verdwijnt.

86. We kunnen ook een expliciete formule verkrijgen door het vergelijkingssysteem (*) aan een Laplace-transformatie te onderwerpen. We vermenigvuldigen (*) met $e^{(\lambda, \tau)}$ en sommeren over alle λ met $m \neq 0$. Dan verschijnt vanzelf

$$\chi(\tau) = \sum m_{\lambda} e^{(\lambda, \tau)}.$$

In de eerste summand substitueren we μ voor $\lambda + p\alpha$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in W} \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda + p\alpha, \alpha) m_{\lambda + p\alpha} &= \sum_{\mu, \alpha, p} (\mu, \alpha) m_{\mu} e^{(\mu - p\alpha, \tau)} \\ &= \sum_{\mu, \alpha} (\mu, \alpha) m_{\mu} e^{(\mu, \tau)} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p(\alpha, \tau)} \\ &= \sum_{\mu, \alpha} (\mu, \alpha) m_{\mu} e^{(\mu, \tau)} \frac{e^{-(\alpha, \tau)}}{1 - e^{-(\alpha, \tau)}}. \end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \mu e^{(\mu, \tau)} &= \text{grad } e^{(\mu, \tau)}, \\ \alpha \frac{e^{-(\alpha, \tau)}}{1 - e^{-(\alpha, \tau)}} &= \text{grad } \log(1 - e^{-(\alpha, \tau)}), \\ (\lambda, \lambda) e^{(\lambda, \tau)} &= \Delta e^{(\lambda, \tau)}, \end{aligned}$$

waarbij grad en Δ in de zin van het inproduct in θ^* zijn gedefinieerd.

Onze formule wordt nu:

$$(\text{grad } \sum_{\alpha \in W} \log(1 - e^{-(\alpha, \tau)}), \text{grad } \chi) + \Delta \chi = c_{\hat{\lambda}} \chi \quad (*)$$

(De operator, die links op χ is toegepast, is trouwens de op de groep invariant gedefinieerde Laplace-operator.)

87. Met een kleine afwijking van 71 definiëren we nu (we zeggen Q i.p.v. Δ):

$$Q(\tau) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2}(\alpha, \tau)} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha, \tau)})$$

Q is antisymmetrisch tegenover de kaleidoskoopgroep K , want

$$Q(S_{\alpha} \tau) = -Q(\tau),$$

dus $Q(S\tau) = \det S \cdot Q(\tau)$ voor $S \in K$.

Q is dus een lineaire combinatie van uitdrukkingen

$$\sum_{S \in K} \det S \cdot e^{(S\mu, \tau)}, \quad (*)$$

waarbij μ van de vorm

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \pm \alpha$$

is. μ scheelt van δ een som van wortelvormen, is dus geheel. In (*) mogen we μ zelfs dominant veronderstellen. Dan is of $\mu = \delta$, of minstens één keer $(\mu, \rho) = 0$ voor $\rho \in P$. De substitutie $\mu \rightarrow S_\rho \mu$ verandert dan niets in (*), terwijl (*) anderzijds wegens de antisymmetrie in zijn tegengestelde moet overgaan. Dus komt (*) in Q alleen voor met $\mu = \delta$; het is evident, dat de coëfficiënt dan 1 is. Dus

$$Q(\tau) = \sum_{S \in K} \det S \cdot e^{(S\delta, \tau)}. \quad (**)$$

Verder is

$$Q^2 = \pm \prod_{\alpha} (1 - e^{-(\alpha, \tau)}).$$

De formule (*) uit 86 wordt nu

$$(2 \text{ grad } \log Q, \text{ grad } \chi) + \Delta \chi = c_{\hat{\lambda}} \chi.$$

Nu is

$$\text{grad } \log Q = \frac{\text{grad } Q}{Q},$$

dus

$$2(\text{grad } Q, \text{ grad } \chi) + Q \Delta \chi = c_{\hat{\lambda}} Q \chi.$$

Telt men beiderzijds $\chi \Delta Q$ op, dan krijgt men

$$\Delta(Q\chi) = c_{\hat{\lambda}} Q\chi + \chi \Delta Q.$$

Stelt men

$$Q\chi = \varphi,$$

dan wordt

$$\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \frac{\Delta Q}{Q} = c_{\hat{\lambda}}.$$

Nu is volgens (**)

$$\Delta Q = (\delta, \delta) Q,$$

dus

$$\Delta \varphi = (\hat{\lambda} + \delta, \hat{\lambda} + \delta) \varphi \quad (***)$$

χ is symmetrisch bij K , Q antisymmetrisch, dus φ antisymmetrisch. $\varphi = Q\chi$ is een lineaire combinatie van uitdrukkingen

$$e^{(S\delta, \tau)} e^{(\lambda, \tau)} = e^{(\xi, \tau)} \quad (m_{\lambda} \neq 0, S \in K),$$

waarbij wegens (***)

$$\Delta e^{(\xi, \tau)} = (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma) e^{(\xi, \tau)}$$

moet zijn, dus

$$(\xi, \xi) = (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma).$$

Anderzijds is ξ van de vorm

$$\xi = S\sigma + \lambda,$$

dus

$$S^{-1}\xi = \sigma + S^{-1}\lambda,$$

$$(\sigma + S^{-1}\lambda, \sigma + S^{-1}\lambda) = (\hat{\lambda} + \sigma, \hat{\lambda} + \sigma),$$

dus volgens 79:

$$S^{-1}\lambda = \hat{\lambda},$$

dus

$$S^{-1}\xi = \hat{\lambda} + \sigma$$

$$\xi = S(\hat{\lambda} + \sigma).$$

Wegens de antisymmetrie van φ en $m_{\hat{\lambda}} = 1$ is nu

$$\varphi(\tau) = \sum_{S \in K} \det S e^{(S(\hat{\lambda} + \sigma), \tau)},$$

dus

$$\chi(\tau) = \frac{\sum_{S \in K} \det S e^{(S(\hat{\lambda} + \sigma), \tau)}}{\sum_{S \in K} \det S e^{(S\sigma, \tau)}}$$

Dit is H. Weyl's Karakterformule (bij hem transcendent bewezen).

88. Deze formule geldt natuurlijk alleen, waar de noemer niet verdwijnt. Waar dit wel het geval is, kan men de waarde van het quotiënt volgens L'Hôpital bepalen. In het bijzonder doen we dit voor $\tau = 0$, d.w.z. voor de groepéén. De uitkomst geeft dan de dimensie van de voorstelling met het gegeven gewicht $\hat{\lambda}$.

De grensovergang naar 0 wordt voltrokken langs $\tau = t\sigma$ ($t \rightarrow 0$). De teller is

$$\begin{aligned} \sum \det S e^{(S(\hat{\lambda} + \sigma), t\sigma)} &= \sum \det S e^{(S\sigma, t(\hat{\lambda} + \sigma))} = Q(t(\hat{\lambda} + \sigma)) \\ &= \prod_{\alpha > 0} \left(e^{\frac{1}{2}t(\hat{\lambda} + \sigma, \alpha)} - e^{-\frac{1}{2}t(\hat{\lambda} + \sigma, \alpha)} \right) \\ &= \prod_{\alpha > 0} (t(\hat{\lambda} + \sigma, \alpha) + \dots) \end{aligned}$$

De noemer is

$$\prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2}t(\sigma, \alpha)} - e^{-\frac{1}{2}t(\sigma, \alpha)}) = \prod_{\alpha > 0} (t(\sigma, \alpha) + \dots).$$

Het quotiënt wordt voor $t \rightarrow 0$

$$\dim R = \frac{\pi_{\alpha > 0}(\hat{\lambda} + \sigma, \alpha)}{\pi_{\alpha > 0}(\sigma, \alpha)}$$

Dit is H. Weyl's dimensieformule.

89. We komen nog terug op de voorstellingen van $\mathfrak{L}_1$ en $\mathfrak{V}_1$ met halftallige hoogste gewichten. Uit de halftalligheid kan men gemakkelijk afleiden, dat zij de draaigroep (π_2 resp. π_3) niet eenduidig voorstellen. Zij heten ook spin-voorstellingen. Men kan ze het handigste opschrijven met behulp van Clifford-algebras.

We nemen de draaigroep van de n -ruimte in die vorm aan, dat ze een positief definitie kwadratische vorm invariant laat, en wel de een-vorm. De infinitesimale transformaties worden dan antisymmetrische matrices. Zij D_{ab} de matrix met op de plaats ab een 1, op de plaats ba een -1. De D_{ab} ($a < b$) vormen een basis van de Lie-algebra Γ , $D_{ab} = -D_{ba}$.

$$[D_{ab}, D_{cd}] = 0 \text{ voor } a \neq c, d; b \neq c, d,$$

$$[D_{ab}, D_{bc}] = D_{ac} \text{ voor } a \neq b, b \neq c, c \neq a,$$

$$[D_{ab}, D_{cb}] = -D_{ac} \quad " \quad " \quad .$$

Men stelt $1 = \left[\frac{n}{2} \right]$ en verstaat onder a' de index $a \pm 1$.

Als stam kan men kiezen de verzameling der

$$\sum_{a \leq 1} \omega_a D_{aa} \quad .$$

Als takken krijgt men dan de

$$D_{ab} - D_{a'b'} \pm i D_{ab'} \pm i D_{a'b} \text{ bij de wortelvorm } \pm i(\omega_a + \omega_b),$$

$$D_{ab} + D_{a'b'} \mp i D_{ab'} \mp i D_{a'b} \quad " \quad \pm i(\omega_a - \omega_b),$$

$$\text{en voor } n \text{ oneven} \quad D_{an} \pm i D_{a'n} \quad " \quad \pm \omega_a \quad .$$

($a \neq b$, $a \leq 1, b \leq 1$).

De uitdrukking

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

kan worden ontbonden in de vorm

$$(\xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n)^2,$$

als men grootheden p_a invoert met

$$p_a^2 = 1, \quad p_a p_b + p_b p_a = 0. \quad (*)$$

Met deze p_a kan men een associatieve algebra, de Cliffordalgebra C_n , construeren. Basis van C_n : de producten

$$p_1^{\epsilon_1} p_2^{\epsilon_2} \dots p_n^{\epsilon_n} \quad (\epsilon_a = 0, 1) \quad (**)$$

waarmee men overeenkomstig de relaties (*) rekt. De existentie van C_n wordt inductief bewezen. Zij C_n een associatieve algebra met de basis (**) en de relaties (*). Zij verder bekend dat

$$\bar{p}_a = -p_a$$

een involutorisch automorfisme in C_n definieert.

Tot elementen van C_{n+1} benoemt men de geordende paren van elementen van C_n . De optelling en vermenigvuldiging met een scalair wordt op natuurlijke wijze gedefinieerd, verder:

$$(u_1, u_2)(v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 \bar{v}_2, u_2 \bar{v}_1 + u_1 v_2),$$

$$\overline{(u_1, u_2)} = (\bar{u}_1, -\bar{u}_2).$$

Men rekt de gebruikelijke wetten (in het bijzonder de associatief-wet) na en verifieert, dat de bovenstreep weer een involutorisch automorfisme bepaalt. Identificeert men $(u, 0)$ met u , dan is C_n isomorf in C_{n+1} ingebed.

$$(u_1, u_2)(0, 1) = (u_2, u_1)$$

$$(0, 1)(u_1, u_2) = (\bar{u}_2, \bar{u}_1)$$

$$(\overline{0, 1}) = -(0, 1).$$

Hiermee is de inductiestap voltooid, als men

$$(0, 1) = p_{n+1}$$

stelt.

De 2^n graadselementen van C_n vormen een Lie-algebra Γ' , waarbij

$$[u, v] = uv - vu$$

is gesteld. Γ en Γ' zijn isomorf door middel van

$$D_{ab} \rightarrow \frac{1}{2} p_a p_b,$$

zoals gemakkelijk is na te gaan. We stellen Γ' voor: door de linksvermenigvuldigingen in C_n , d.w.z. aan $q \in \Gamma'$ beantwoordt de afbeelding

$$L_q : u \rightarrow qu \quad (u \text{ doorloopt } C_n).$$

De stam van Γ' wordt overeenkomstig die van Γ gekozen; hij bestaat dus uit de L_q met

$$q = \frac{1}{2} \sum_{a \leq 1} \omega_a p_a p_a.$$

Voor

$$q = \frac{1}{2} p_a p_a,$$

is

$$q^2 = -\frac{1}{4}$$

dus

$$L_q^2 u = L_q^2 u = -\frac{1}{4} u.$$

Dus zijn de eigenwaarden van L_q alleen $\pm \frac{1}{2}i$. Als functies van

$$q = \frac{1}{2} \sum_{a \leq 1} \omega_a p_a p_a,$$

zijn de mogelijke gewichten van de voorstelling dus de

$$\frac{1}{2}i \sum_{a \leq 1} \pm \omega_a.$$

Een vector horende bij het hoogste gewicht

$$\frac{1}{2}i \sum_{a \leq 1} \omega_a$$

is

$$r = (p_1 + ip_1')(p_2 + ip_2') \dots (p_l + ip_l').$$

r is bron van de invariante lineaire deelruimte der

$$qr \text{ met } q \in \Gamma'.$$

Hier hebben we dus inderdaad een irreducibele voorstelling met het hoogste gewicht π_1 voor $\mathcal{L}_1$ en π_2 voor $\mathcal{V}_1$. Om π_1 voor $\mathcal{V}_1$ te verkrijgen, vervange men r door

$$(p_1 + ip_1')(p_2 + ip_2') \dots (p_{l-1} + ip_{(l-1)'}) (p_l - ip_l').$$

Een expliciete voorstelling van de bijbehorende Lie-groepen vindt men in Proc.Kon.Ned.Akad.v.Wet. A 59, 515-522 = Indagationes 18 (1956).

Correcties betreffende cursus "Lie-groepen in meetkundige behandeling" gegeven door Prof.Dr. H. Freudenthal te Eindhoven, 1959-1960.

p. 12, regel 6 v.o.: eind van de regel toevoegen: noemen

p.12a, regel 3: afbeeldingen

p.13, regel 10 v.o.: $\frac{\partial Y}{\partial s} = -e^{-sC(t)} C(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{sC(t)} + \text{enz.}$

p.15, regel 5: $ae^{\frac{V}{C}}$ enz.

regel 7 v.o.: homomorfisme i.p.v. afbeelding

regel 10 v.o.: dubbelpunt achter e^C .

p.17, regel 1: ondergroepen i.p.v. sinusgroepen

regel 14 v.o.: inductief i.p.v. instructief

p.20, regel 15 v.o.: ideaal want $[r, [r, r]] \subset [r, r]$ enz.

p.21, regel 6-7:

$$=aba^{-1}b^{-1} \left((ba^{-1}b^{-1})^{-1}A(ba^{-1}b^{-1}) + (a^{-1}b^{-1})^{-1}B(a^{-1}b^{-1}) - (a^{-1}b^{-1})^{-1}A(a^{-1}b^{-1}) - bBb^{-1} \right)$$

p.22, regel 18 v.o.: G i.p.v. e

p.23, regel 6: Stelling van Lie - onderstrepen

p.28, regel 5: $2\varphi_2(A) = \text{enz.}$

p.28, regel 6 v.o.: "geeft" i.p.v. "heeft"; "de" schrappen

regel 5 v.o. schrappen

regel 3 v.o. achter "een" inlassen "variëteit. In 't algemeen is de"

Verder : dimensie $=r-1$.

regel 1 v.o.: "algemene" inlassen achter "elke"

p.29, regel 5: moet luiden: Dit geldt voor algemene X , dus voor elke X geldt: ≥ 1 .

regel 15 v.o. "voorgesteld" i.p.v. "vastgesteld"

p.30 en volgende. De gothische $\mathfrak{V}$ is niet erg duidelijk.

p.31, regel 9 v.o. "knoop" onderstrepen

p.34, regel 9: $\mathfrak{L}_1$ i.p.v. $\mathfrak{L}_1^2$

regel 4 v.o.: halfenkelvoudige i.p.v. halfcirkelvormige

p.35, regel 7: De laatste α moet een β zijn.

regel 9: "+1" in de exponent schrappen.

regel 7 v.o.: ...de h met $h \in \Gamma_0$ nu alleen op $\Gamma_{\alpha(h_0)} \dots$

regel 6 v.o.: op het eind: $\Gamma_{\alpha(h_0)}$

p.36, regel 2: $(\tilde{h} - \alpha(h))^{dim \Gamma_{\alpha(h_0)}} y=0$ voor $y \in \Gamma_{\alpha(h_0)}$.

p.36, regel 4, toevoegen: $\Gamma_{\alpha(h_0)}$ is onafhankelijk van de keuze van $h_0 \in \Gamma_0$. I.p.v. $\Gamma_{\alpha(h_0)}$ kunnen we dus Γ_{α} zeggen.

p.36, regel 8: $\dots \tilde{h}_0 \stackrel{i}{x=0} \dots = \text{"stam"}$

regel 1 v.o.: Achter α inlassen: en μ .

p.37, regel 5: twee keer "op" i.p.v. "voor".

regel 8: inlassen voor "z $\notin$ Δ ": "zelfs voor"

regel 12, eind, inlassen "r".

p.39, regel 11: "eerste" i.p.v. "tweede"

p. 40: Tussen 1e en 2e regel inlassen de regel: $\pm$ aantal identiek verdwijnende wortels

regel 9: Achter "dus sp $\tilde{f}_+ \tilde{f}_- = 0$ " inlassen "in strijd met het veronderstelde".

Tussen regel 13 en 12 v.o., dus boven

$$\tilde{f}_- x = 0$$

inlassen de regel

$$\tilde{h}x = \mu(h)x$$

p.41, regel 9 v.o.: een α ontbreekt, d.w.z.

$$\mu - \frac{\mu(h_{\alpha})}{\alpha(h_{\alpha})} \alpha = \text{enz.}$$

p.42, regel 2: $x=y+\sigma f_+$

regel 5: is, te weten door $\tilde{f}_- y = \sigma h_{\alpha}$ enz. omdat $\tilde{f}_- y$ knoop,
regel 11 v.o.: achter het laatste $=$ -teken:

$$- \alpha(h_{\alpha})x_0 \bmod f_+$$

regel 5 v.o. $\tilde{f}_-$ i.p.v. $\tilde{f}_+$

regel 4 v.o. "was" i.p.v. "eens"

regel 2 v.o. $y \in \Gamma_{\mu+p}$ enz.

p.43, regel 17 v.o. " α -ladder" i.p.v. "ladder"

p.46, regel 10: $\int$ i.p.v. θ

p.47, regel 1 v.o.: zij brengen de (eindige) kaleidoskoopgroep voort.

p.48, regel 13 v.o.: $\tilde{p}_{\alpha} h=0$ voor enz.

p.50, regel 9: e'_{α} i.p.v. e' .

p.51, regel 6: W_p i.p.v. W

regel 11: Achter het laatste "]" een accent.

p.51, regel 11 v.o. $e'_{-\alpha}$ i.p.v. e'_{α}

regel 2 v.o.: Nu is $\beta < \rho$, dus $\rho = \alpha + \beta <$ enz.

p.52, regel 6: (7) i.p.v. (6)

regel 8: (7) i.p.v. (6)

regel 9 v.o.: $[e'_{\rho}, e'_{-\gamma}] = \text{enz.}$

regel 6 v.o.: $[e'_{-\gamma}, e'_{-\delta}] = \text{enz.}$

p.53, regel 7: Achter het tweede $=$ -teken:

$$\nu_{\alpha} \nu_{-\alpha} h_{-\alpha} \text{ geldt}$$

regel $\left. \begin{matrix} 10 \\ 12 \\ 15 \end{matrix} \right\}$ de streep boven $\nu_{-\alpha}$ doortrekken, dus 3 keer $\sqrt{\nu_{-\alpha}}$

regel 7 v.o.: De komma bij $N_{-\alpha, -\beta}$ laten afzakken

regel 2 v.o.: Achter Γ_{μ} inlassen " $x \neq 0$ ".

p.54, regel 6: Achter "onderen" inlassen "is".

p.55, regel 15 v.o.: "groep" i.p.v. θ_u .

p.57, 4e regel van No.52: ... $\alpha(h_{\alpha}) > 0$...

regel 7 v.o.: $A = -A'$,

regel 5 v.o.: $A + \overline{A'} = 0$.

p.58, regel 13: $A + \overline{A'} = 0$,

regel 15: $\overline{A} = SAS$,

p.59, regel 10 v.o.: "positieve" i.p.v. "primitieve".

p.60, regel 5: Maar ook $(\sum r_i \lambda_i, \sum r_j \lambda'_j) \geq 0$.

regel 14 baar. Immers gaat men van de door P als basis bepaalde orde uit, dan blijken alle elemen-

p.61, regel 15 v.o.: Verwisselen de woorden "kortere" en "langere"

regel 8 v.o. (56) i.p.v. (55)

p.62, regel 14 v.o. (54) i.p.v. (53)

p.63, regel 12: $\sum \sigma_{ij} \xi_i \eta_j = 0$

p.66, regel 10: $=$ i.p.v. $\neq$

p.68, regel 4,7,9,13,14,15,16, v.o.: $=$ vervangen door $\leq$

regel 4 v.o.:

$$\varphi(P, \delta) \leq 1 - \frac{p}{2p+1} - \frac{q}{2q+1} - \frac{r}{2r+1}.$$

p.71, regel 5 v.o. $\neq$ i.p.v. $\in$

regel 3 v.b. (56) i.p.v. (55)

- p.75, regel 14 v.o.: achter] inlassen "als functie van τ "
 regel 5 v.o.: klein kringetje i.p.v. stip
- p.77, regel 19 v.o.: "in" i.p.v. "en"
- p.78, regel 3 einde moet zijn: $w(\tau)w(\tau^*)^{-1}$
 regel 4: met $|\tau - \tau^*| \leq$ enz.
- p. 79, regel 12 eind: komma i.p.v. punt
 regel 13: "dan" i.p.v. "Dan"
 regel 3 v.o.: $v(0)=w(0)=\acute{e}en$, $v(1)=w(1)$
- p.81, regel 7: "van" i.p.v. "voor"
- p.82, regel 10 v.o.: Onder $\Pi: \alpha \in W$ i.p.v. α
 regel 5 v.o.: $h_0 e^H$ i.p.v. $h_0 H$.
- p.83, regel 4 eind: $\dots \lim h_n = h_0 \in e^{\bar{D}}$
 regel 8: "dergelijke" i.p.v. "deze"
 regel 16: "echter" i.p.v. "elders"
 regel 16 v.o.: van 2, schiet enz.
- p.84, regel 5 eind: $\dots cVc^{-1} \in U$
- p.89, regel 1 v.o.: $S=S_{\sigma_p} \dots S_{\sigma_1}$
- p.91, regel 10 v.o.: $(Hx, x) = \int (\overline{f(a)})' f(a) x, x) d \text{ vol}_a =$ enz.
- p.93, regel 5 v.o.: $ACx = CAx = \lambda_A Cx$.
- p.95, regel 8 v.o. toevoegen: " $\varphi \in \phi$,"
- p.96, regel 5 v.o. "vormen" i.p.v. "noemen we"
- p.97, regel 4: "de" i.p.v. "een"
 regel 17 v.o.: "onder" i.p.v. "verder"
 "de" i.p.v. "der"
- p.98, regel 5: $\int f(c^{-1}ac) d \text{ vol}_c$
- p.99, regel 10 v.o.: $\dots \acute{e}en$ -element...
- p.100, regel 3: "coëfficiënten" i.p.v. "exponenten"
 regel 10: $\sum u_{ij} (x_i x_j - x_j x_i - [x_i x_j]) v_{ij}$ (2)
 regel 11: komma achter X
 regel 12 v.o.: achter minimaal inlassen =m
 regel 6 v.o.: $\dots$ Zij $w \in R_m$ van de $\dots$
- p.101, regel 5 v.o.: $\text{ling}(5)$ in R_{m-1} zijn.
- p.103, regel 13: $z = x_{i_1} \dots x_{i_a} \dots x_{i_n}$

p.104, regel 16 v.o.: $z = \sum_i a_i^1 a_i$

regel 9 v.o.: "het spoor" i.p.v. "een spoor"

p.106, regel 12: $E_{-\alpha} x = 0$

regel 11 v.o.: $E_{-\alpha} x_{j+1} = \rho_j x_j$

p.107, regel 2,5,8,13,15 steeds -2 i.p.v. 2

p.108, regel 15 v.o. op 't eind α aanvullen

regel 5-3 v.o.

$$E_{-\alpha}^{N+3} E_{-\beta} y = E_{-\alpha}^{N+2} E_{-\beta} E_{-\alpha} y + (\dots) E_{-\alpha}^{N+2} E_{-\beta-\alpha} y = \dots = E_{-\beta} E_{-\alpha}^{N+3} y + (\dots) E_{-\beta-\alpha}$$

$$E_{-\alpha}^{N+2} y + (\dots) E_{-\beta-2\alpha} E_{-\alpha}^{N+1} y + (\dots) E_{-\beta-3\alpha} E_{-\alpha}^N y = 0$$

p.109, regel 16: $p' \leq p'' + m \leq p$. Dus ... en λ van $\hat{\lambda}$ een som

p.110, regel 1 v.o.: ... was $\rho = (\alpha - p \rho) + ((p+1)\rho - \alpha)$ som van

p.113, regel 4: $\lambda - p\alpha$ met p geheel ≥ 0 , ≤ 2 ...

regel 7: geheel, ≥ 0 , $\leq \dots$

regel 6 v.o.: $Sh_\alpha = h_{S\alpha}$, $Se_\alpha =$ veelvoud van $e_{S\alpha}$.

p.114, regel 8: $g_a = f_{S^{-1}a}$

regel 12: $g_h x = f_{S^{-1}h} x = \lambda(S^{-1}h)x = ((S\lambda)(h))x$,

p.121, regel 3 v.o.

$$(\lambda, \lambda + 2\delta) m_\lambda = ((\lambda + \delta, \lambda + \delta - (\delta, \delta)) m_\lambda = \text{enz.}$$

p.122, regel 12: voor --teken inlassen

$$e(\lambda, \tau)$$

regel 5 v.o. haakje sluiten

p.127, regel 4 v.o.:

$$(p_1 + ip_1, i) (p_2 + ip_2, i) \dots \text{enz.}$$

